Степенные ряды

Степенным рядом в окрестности точки $z_0 \in \mathbb{C}$ или по степеням $z - z_0$ называется ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \qquad c_n \in \mathbb{C}.$$

Теорема 16 (Теорема Абеля). *Если ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ *сходится в точке* $z = z_1 \neq z_0$, *то он сходится абсолютно в круге* $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$ *и для любого* $\rho < |z_1 - z_0|$ *сходится равномерно в замкнутом круге* $|z - z_0| \leqslant \rho$.

Доказательство. 1). Возьмём z: $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$. Из сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z_1 - z_0)^n$ следует, что его общий член стремится к нулю, а значит, последовательность $c_n(z_1 - z_0)^n$ ограничена. Тогда

$$|c_n (z - z_0)^n| = \left|c_n (z_1 - z_0)^n \frac{(z - z_0)^n}{(z_1 - z_0)^n}\right| \leqslant M q^n,$$

где $q = \left|\frac{z - z_0}{z_1 - z_0}\right| < 1$ и ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} M q^n$ сходится как бесконечно убывающая геометрическая прогрессия. По признаку сравнения получаем, что ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ в указанной точке z сходится абсолютно.

2). Снова воспользуемся ограниченностью последовательности $c_n (z_1 - z_0)^n$ для оценки общего члена ряда:

$$|c_n (z - z_0)^n| = \left|c_n (z_1 - z_0)^n \frac{(z - z_0)^n}{(z_1 - z_0)^n}\right| \leqslant M \left|\frac{(z - z_0)^n}{(z_1 - z_0)^n}\right|.$$

Далее, для всех z: $|z - z_0| \leqslant \rho < |z_1 - z_0|$ получаем

$$|c_n (z - z_0)^n| \leqslant M \frac{\rho^n}{|z_1 - z_0|^n} = M q^n,$$

где $q = \frac{\rho}{|z_1 - z_0|} < 1$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty} M q^n < \infty$. Согласно признаку Вейерштрасса отсюда следует, что ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ сходится равномерно в замкнутом круге $|z - z_0| \leqslant \rho < |z_1 - z_0|$. $\square$

Следствие. Если ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ расходится в точке $z = z_2 \neq z_0$, то он расходится во всех точках z: $|z - z_0| > |z_2 - z_0|$.

Доказательство легко проводится методом от противного. $\square$

Определение 21. Число

$$R = \sup \left\{ |z - z_0| : \ \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n < \infty \right\}$$

называется *радиусом сходимости* степенного ряда. Круг $|z - z_0| < R$ называется *кругом сходимости* степенного ряда.

Из определения радиуса сходимости и теоремы Абеля следует, что степенной ряд

- сходится абсолютно в круге сходимости;
- сходится равномерно в любом замкнутом круге $|z - z_0| \leqslant \rho < R$ внутри круга сходимости;
- расходится вне круга сходимости, т.е. при $|z - z_0| > R$.

Как и в курсе математического анализа доказывается, что

- радиус сходимости степенного ряда вычисляется по формуле Коши–Адамара

$$R = \frac{1}{\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}},$$

  или, если этот предел существует,

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|.$$

Из теорем об интегрировании и дифференцировании функциональных рядов (см. свойство 5 и теорему 14) вытекает, что

- степенные ряды можно интегрировать и дифференцировать почленно внутри круга сходимости; при этом радиус сходимости ряда не меняется[19];
- сумма степенного ряда является аналитической функцией в области $|z - z_0| < R$.

Почленным дифференцированием суммы ряда $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ легко убедиться, что

- коэффициенты степенного ряда вычисляются по формулам

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Таким образом, мы получили, что

- *если функция $f(z)$ представима степенным рядом в окрестности точки z_0, то она аналитическая в этой окрестности и степенной ряд является её рядом Тейлора.*

Справедливо и обратное утверждение.

Теорема 17 (Теорема Тейлора)**.** *Любая аналитическая в круге $|z - z_0| < R$ функция однозначно представима в этом круге степенным рядом $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$.*

Доказательство. Пусть функция $f(z)$ – аналитическая в круге $|z-z_0| < R$. Возьмём в этом круге произвольную точку z и проведём окружность C_ρ с центром в точке z_0 радиуса ρ: $|z - z_0| < \rho < R$. Тогда значение функции f в точке z (согласно интегральной формуле Коши) может быть вычислено как интеграл по C_ρ:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta.$$

[19]Поведение на границе может меняться, как показывает пример 7.

Функцию $\frac{1}{\zeta - z}$ для $\zeta \in C_\rho$ можно разложить в ряд по степеням $z - z_0$:

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0 + z_0 - z} = \frac{1}{(\zeta - z_0)\left(1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}},$$

причём этот ряд сходится равномерно относительно $\zeta \in C_\rho$ в силу условия $\frac{|z - z_0|}{|\zeta - z_0|} = \frac{|z - z_0|}{\rho} = q < 1$. Следовательно на этой окружности его можно интегрировать почленно. Получаем

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_\rho} f(\zeta) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta \cdot (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

где

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta.$$

Итак, мы показали, что в произвольной точке z круга $|z - z_0| < R$ функция $f(z)$ представима в виде ряда по степеням $z - z_0$. Причём коэффициенты этого разложения не зависят от выбранной точки z:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta = \frac{1}{n!} \cdot \frac{n!}{2\pi i} \oint_{C_\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!},$$

что доказывает единственность разложения функции $f(z)$ в степенной ряд. □

З а м е ч а н и е. В ходе доказательства мы установили, что коэффициенты разложения функции в степенной ряд являются коэффициентами Тейлора.

Суммируя все вышеприведённые рассуждения, получаем следующую (локальную) характеристику аналитических функций:

Функция является аналитической в круге $|z - z_0| < R$ тогда и только тогда, когда она представима в этом круге степенным рядом; при этом ряд является рядом Тейлора.

В ряде случаев используется понятие регулярной функции.

Определение 22. Функция $f(z)$ называется *регулярной в точке* z_0, если в некоторой окрестности этой точки она раскладывается в степенной ряд:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \qquad |z - z_0| < R.$$

Таким образом, *аналитичность функции в окрестности точки z_0 есть её регулярность в этой точке.*

Пример 8. Разложим функцию $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ в степенной ряд в окрестности точек $z = 0$ и $z = 1$.

1). $z_0 = 0$.

$$f(z) = \frac{1}{1 - (-z^2)} = \sum_{k=0}^{\infty} (-z^2)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^{2k},$$

где

$$c_{2k} = (-1)^k, \quad c_{2k+1} = 0 \quad \Rightarrow \quad \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|} = 1 \quad \Rightarrow \quad R = 1$$

и областью сходимости ряда является круг $|z| < 1$. При этом ряд не сходится на границе круга, хотя во всех точках круга кроме $z = \pm i$ функция $f(z)$ является аналитической.

2). $z_0 = 1$.

$$f(z) = \frac{1}{(z+i)(z-i)} = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i}\right) = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{z-1+(1-i)} - \frac{1}{z-1+(1+i)}\right) =$$

при $|z-1| < |1+i| = \sqrt{2}$ и $|z-1| < |1-i| = \sqrt{2}$

$$= \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{1-i}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\Big(\frac{z-1}{1-i}\Big)^n - \frac{1}{1+i}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\Big(\frac{z-1}{1+i}\Big)^n\right).$$

Представим $1-i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$, $1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ и получим:

$$f(z) = \frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{e^{i\frac{\pi(n+1)}{4}}}{2^{\frac{n+1}{2}}} - \frac{e^{-i\frac{\pi(n+1)}{4}}}{2^{\frac{n+1}{2}}}\right)(z-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin\frac{\pi(n+1)}{4}}{2^{\frac{n+1}{2}}}\cdot(z-1)^n.$$

Область сходимости ряда: $|z-1| < \sqrt{2}$.