

11.7. Приложения определенного интеграла

Вычисление площадей

Вычисление площадей

Пусть функция $y = f(x)$ определена, непрерывна и неотрицательна на отрезке $[a, b]$. Плоская фигура, ограниченная дугой графика функции на этом отрезке и прямыми $x = a$, $x = b$, $y = 0$, называется *криволинейной трапецией* (рис. 11.1).

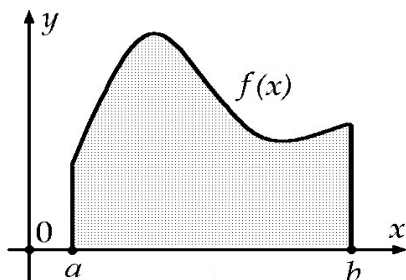


Рис. 11.1

Площадь криволинейной трапеции определяется по формуле

$$S = \int_a^b f(x) dx.$$

Площадь фигуры, ограниченной непрерывными на отрезке $[a, b]$ кривыми $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ и прямыми $x = a$, $x = b$, при условии, что $f_2(x) \geq f_1(x)$ на $[a, b]$ (рис. 11.2), определяется по формуле

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx.$$

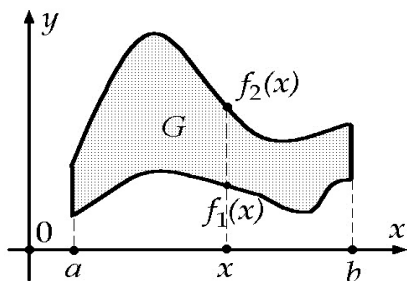


Рис. 11.2

Пусть $r = r(\varphi)$ ($\varphi \in [\alpha, \beta]$) – уравнение непрерывной кривой, заданной в полярных координатах. Плоская фигура, ограниченная дугой графика функции на этом отрезке и лучами $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$, называется *криволинейным сектором* (рис. 11.3).

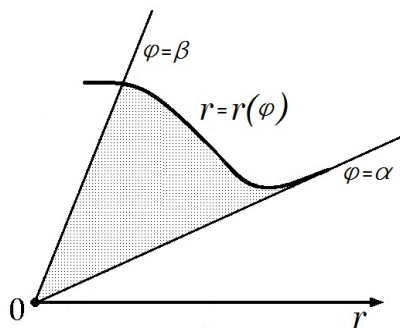


Рис. 11.3

Площадь криволинейного сектора определяется по формуле

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi) d\varphi.$$

Вычисление длин дуг

Пусть кусочно-гладкая кривая задана параметрически:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in [a, b].$$

Тогда длина ее дуги вычисляется по формуле

$$L = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt.$$

Если функция $y = f(x)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[a, b]$, то длина дуги соответствующей кривой находится по формуле

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$