Элементы теории множеств

Понятие множества

Понятие множества в математике рассматривается как первичное, неопределяемое понятие.

Под *множеством* будем понимать совокупность (или семейство, или собрание, или класс) объектов, обладающих определенным признаком.

Например, множество деревьев в парке, множество звезд на небе, множество студентов в аудитории, множество натуральных чисел, множество корней уравнения $x^2 - 3x + 2 = 0$, множество треугольников на плоскости и т.д.

Объекты, обладающие этим признаком, называются *элементами множества*. Множества будем обозначать заглавными буквами $A, B, C, \ldots$, а элементы этих множеств – строчными буквами $a, b, c, \ldots$. Множество *содержит* элементы, а элементы *принадлежат* множеству. Для обозначения принадлежности используется знак $\in$. Если a есть элемент множества A, то этот факт записывается так: $a \in A$. Запись $b \notin A$ означает, что элемент b не принадлежит множеству A. Так, имеем $3 \in \mathbb{Z}$ и $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$.

Множества делятся на *конечные* и *бесконечные*. Например, множества $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ бесконечны, а множество корней уравнения $x^2 - 5x + 6 = 0$ конечно.

Множество, не содержащее элементов, называется *пустым*; оно обозначается символом $\emptyset$.

Запись

$$C = \{x \in B \mid P(x)\}$$

означает, что множество C состоит из тех и только тех элементов множества B, которые обладают свойством $P(x)$.

Например, $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant 1\}$ – множество тех действительных чисел, которые обладают свойством быть не меньше нуля и не больше единицы.

Определение 1. Множество Y называется *подмножеством* множества X, если любой элемент множества Y является элементом множества X. Это обозначается записью $Y \subseteq X$.

В кванторах это определение можно записать следующим образом:

$$\forall y \in Y : y \in X.$$

Например, $\{1, 2\} \subseteq \{1, 2, -\frac{1}{2}\}$, $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$, $Q \subseteq \mathbb{R}$.

Из определения подмножества следует, что всякое множество является подмножеством самого себя, а пустое множество является подмножеством любого множества.

Пример 1. Решим следующую простую задачу: найти все подмножества множества $\{1, 2, 3\}$. Очевидно, что это множество имеет восемь подмножеств: $\emptyset$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$ и $\{1, 2, 3\}$.

Определение 2. Множество X *равно* множеству Y, если любой элемент множества X является элементом множества Y и любой элемент множества Y является элементом множества X. Другими словами, если X и Y состоят из одних и тех же элементов. На письме это обозначается обычным образом: $X = Y$.

Из определений следует, что множества X и Y равны тогда и только тогда, когда $X \subseteq Y$ и $Y \subseteq X$.

Пример 2. Множество корней уравнения

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$$

равно множеству $\{1, 2, 3\}$, а множество $\{51, 2, 3\}$ равно множеству $\{3, 2, 51, 2\}$.

Заметим, что, перечисляя элементы множества, принято записывать каждый из них только один раз. Подчеркнем, что по определению равенства неважно, в каком порядке перечисляются элементы.

Операции над множествами

Рассмотрим следующие операции над множествами: пересечение, объединение, дополнение и разность. Установим основные свойства этих операций.

Определение 3. Пусть X и Y – некоторые множества. Тогда *пересечением* множеств X и Y называется множество

$$X \bigcap Y = \{x \mid x \in X \text{ и } x \in Y\},$$

объединением множеств X и Y называется множество

$$X \bigcup Y = \{x \mid x \in X \text{ или } x \in Y\}.$$

Например, если $X = \{2, 4, 6, 8, 9\}$, $Y = \{1, 3, 6, 9\}$, то $X \bigcap Y = \{6, 9\}$, а $X \bigcup Y = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9\}$.

Основные свойства введенных операций:

1. $X \bigcap X = X$ – *идемпотентность пересечения*;
2. $X \bigcup X = X$ – *идемпотентность объединения*;
3. $X \bigcap Y = Y \bigcap X$ – *коммутативность пересечения*;
4. $X \bigcup Y = Y \bigcup X$ – *коммутативность объединения*;
5. $(X \bigcap Y) \bigcap Z = X \bigcap (Y \bigcap Z)$ – *ассоциативность пересечения*;
6. $(X \bigcup Y) \bigcup Z = X \bigcup (Y \bigcup Z)$ – *ассоциативность объединения*;
7. $X \bigcap (Y \bigcup Z) = (X \bigcap Y) \bigcup (X \bigcap Z)$ – *дистрибутивность* пересечения относительно объединения;
8. $X \bigcup (Y \bigcap Z) = (X \bigcup Y) \bigcap (X \bigcup Z)$ – дистрибутивность объединения относительно пересечения;
9. $X \bigcap \emptyset = \emptyset$;
10. $X \bigcup \emptyset = X$.

Доказательство отмеченных свойств продемонстрируем на примере тождества 8. Надо доказать, что любой элемент множества $X \bigcup (Y \bigcap Z)$ принадлежит множеству $(X \bigcup Y) \bigcap (X \bigcup Z)$, и обратно.

Пусть $a \in X \bigcup (Y \bigcap Z)$. Тогда $a \in X$ или $a \in Y \bigcap Z$. Если $a \in X$, то $a \in X \bigcup Y$ и $a \in X \bigcup Z$, и поэтому a принадлежит их пересечению, т. е. правой части. Если же $a \in Y \bigcap Z$, то $a \in Y$ и $a \in Z$. Отсюда следует, что $a \in X \bigcup Y$ и $a \in X \bigcup Z$, т. е. a принадлежит и их пересечению: $a \in (X \bigcup Y) \bigcap (X \bigcup Z)$.

Докажем обратное включение. Пусть теперь $a \in (X \bigcup Y) \bigcap (X \bigcup Z)$. Это означает, что $a \in X \bigcup Y$ и $a \in X \bigcup Z$. Если $a \in X$, то $a \in X \bigcup (Y \bigcap Z)$. Если же $a \notin X$, то из условий $a \in X \bigcup Y$ и $a \in X \bigcup Z$ следует, что $a \in Y$ и $a \in Z$, а значит $a \in Y \bigcap Z$, следовательно, $a \in X \bigcup (Y \bigcap Z)$. $\square$

Определение 4. Множество $\mathcal{E}$ называется *универсальным* для системы множеств $A, B, C, \ldots$, если каждое из множеств $A, B, C, \ldots$ является подмножеством множества $\mathcal{E}$.

Как видно из определения, универсальность множества является относительным понятием: для одной системы множеств данное множество будет универсальным, для другой – нет. Если рассматриваются числовые множества, то в качестве универсального нередко берут множество всех действительных чисел, если рассматриваются геометрические фигуры планиметрии, то в качестве универсального можно взять множество всех точек плоскости.

Определение 5. Пусть $\mathcal{E}$ – универсальное множество для данной системы множеств, X – некоторое множество этой системы. *Дополнением* множества X называется множество $C_{\mathcal{E}}X$ (или просто CX) тех элементов универсального множества, которые не принадлежат X.

Так, если $X = \{1, 2, 4, 6, 7, 8\}$, а универсальное множество – множество всех десятичных цифр, то $CX = \{0, 3, 5, 9\}$.

Справедливы равенства:

1. $X \bigcap \mathcal{E} = X$;
2. $X \bigcup \mathcal{E} = \mathcal{E}$;
3. $C\mathcal{E} = \emptyset$;
4. $C\emptyset = \mathcal{E}$.
5. Законы двойственности:
   $C\big(X \bigcap Y\big) = CX \bigcup CY$;
   $C\big(X \bigcup Y\big) = CX \bigcap CY$.

Домашнее задание. Доказать законы двойственности 5.

Определение 6. Пусть X и Y – некоторые множества. *Разностью* множеств X и Y называется множество $X \backslash Y = \{x \,|\, x \in X \text{ и } x \notin Y\}$.

Например, если $X = \{1, 3, 7, 8, 9\}$, а $Y = \{5, 6, 7, 8\}$, то $X \backslash Y = \{1, 3, 9\}$.

Разность легко выражается через введенные ранее операции. Действительно, нетрудно показать, что $X \backslash Y = X \bigcap CY$.

Операции над множествами полезно иллюстрировать рисунками, которые часто называются *диаграммами Эйлера-Венна.* На этих диаграммах множество изображается в виде множества точек плоскости, ограниченного некоторой линией.

Например, на диаграммах рис. 1 и рис. 2 множества A и B представлены в виде двух овалов, универсальное множество – в виде прямоугольника, и изображены соответственно множества $A \bigcup B$ и $A \bigcap B$ (не заштрихованные) и их дополнения (заштрихованные).

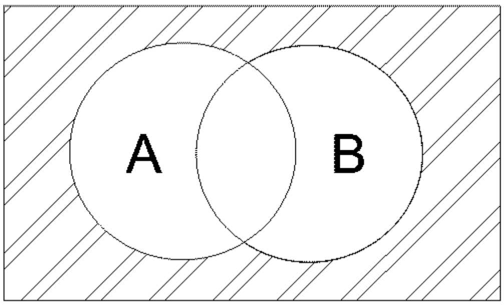

Рис. 1

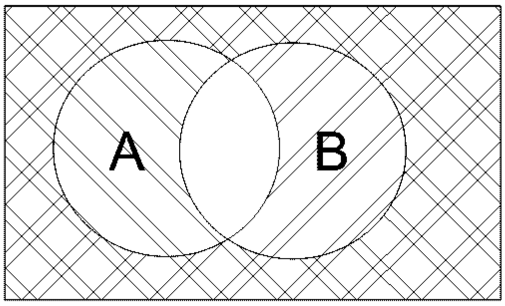

Рис. 2

На диаграмме рис. 2 множества CA и CB заштрихованы разнонаправленными наклонными линиями, а их пересечение представлено в виде части прямоугольника, заштрихованной и теми, и другими линиями. Сравнение этих диаграмм иллюстрирует один из законов двойственности (*к какому?*).

Прямое (декартово) произведение

Определение 7. Пусть X и Y – некоторые множества. *Прямым (декартовым) произведением* $X \times Y$ множеств X и Y называется множество всевозможных упорядоченных пар (x, y), первая компонента которых принадлежит X, а вторая – Y.

Прямое произведение одинаковых множеств $X \times X$ обозначают X^2.

Пример 3. Если $X = \{1, 2, 3\}$, а $Y = \{5, 7\}$, то

$$X \times Y = \{(1, 5), (1, 7), (2, 5), (2, 7), (3, 5), (3, 7)\}.$$

После введения системы координат на плоскости каждой точке соответствует упорядоченная пара действительных чисел (координаты этой точки), и каждая упорядоченная пара чисел однозначно определяет точку плоскости. Это показывает, что координатную плоскость можно отождествить с множеством $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$.

Операция прямого произведения двух множеств некоммутативна. Действительно, если X и Y – множества из примера 3, то $X \times Y$ не равно $Y \times X$.

Определение 8. Пусть X, Y, Z – некоторые множества. *Прямым (декартовым) произведением* $X \times Y \times Z$ называется множество всевозможных упорядоченных троек, первая компонента которых принадлежит X, вторая – Y, третья – Z, т. е.

$$X \times Y \times Z = \{(x, y, z) |\, x \in X,\ y \in Y,\ z \in Z\}.$$

Прямое произведение одинаковых множеств $X \times X \times X$ обозначают X^3.

Например, если $X = \{1, 2\}$, $Y = \{2, 3\}$, $Z = \{4\}$, то

$$X \times Y \times Z = \{(1, 2, 4), (1, 3, 4), (2, 2, 4), (2, 3, 4)\}.$$

Мы отмечали выше, что координатную плоскость можно отождествить с множеством $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Трехмерное пространство можно отождествить с множеством $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Аналогично можно ввести прямое произведение четырех, пяти и любого конечного числа множеств.