11.3. Простейшие свойства интеграла

Свойство 1. Если функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$, то она интегрируема на любом отрезке $[a_1, b_1] \subset [a, b]$.

Свойство 2. Пусть $a < c < b$. Если f интегрируема на отрезках $[a, c]$ и $[c, b]$, то она интегрируема и на отрезке $[a, b]$ и имеет место равенство

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Свойство 3. Пусть функции f и g интегрируемы на отрезке $[a, b]$. Тогда их сумма $f + g$ также интегрируема на отрезке $[a, b]$ и имеет место равенство

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

Свойство 4. Пусть функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$ и C – константа. Тогда функция Cf интегрируема на $[a, b]$ и имеет место равенство

$$\int_a^b Cf(x)dx = C\int_a^b f(x)dx.$$

Свойство 5. Если функции f и g интегрируемы на отрезке $[a, b]$, то их произведение fg тоже интегрируемо на отрезке $[a, b]$.

Свойство 6. Пусть функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$ и $f(x) \geqslant 0$. Тогда при $a < b$

$$\int_a^b f(x)dx \geqslant 0.$$

Свойство 7. Пусть функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$ и $f(x) \geqslant 0$. Пусть существует точка $x_0 \in [a, b]$ такая, что f непрерывна в точке x_0 и $f(x_0) > 0$. Тогда при $a < b$

$$\int_a^b f(x)dx > 0.$$

Свойство 8. Пусть функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$. Тогда функция $|f|$ также интегрируема на отрезке $[a, b]$ и при $a < b$ имеет место неравенство

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leqslant \int_a^b |f(x)|dx.$$