

9. Дифференциальное исчисление функции одной переменной

Важной характеристикой движения материальной точки является ее мгновенная скорость. Допустим, материальная точка движется по закону $S(t)$. Фиксируя произвольный момент времени t и его *приращение* $\Delta t > 0$, получим *среднюю скорость* на отрезке времени $[t, t + \Delta t]$:

$$\frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{\Delta t}.$$

Пусть, например, материальная точка движется по закону $S(t) = \frac{1}{2}gt^2$ по прямой, т. е. находится в свободном падении под действием постоянной силы тяжести. Тогда *средняя скорость*

$$v_{\text{cp}}(t, \Delta t) = \frac{g \cdot (t + \Delta t)^2 - gt^2}{2\Delta t} = gt + \frac{1}{2}g\Delta t.$$

Мгновенной скоростью (или просто *скоростью*) движущейся точки называется предел, к которому стремится средняя скорость $v_{\text{cp}}(t, \Delta t)$ при стремлении к нулю приращения времени, т. е.

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_{\text{cp}}(t, \Delta t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{\Delta t}.$$

Итак, при нахождении скорости изменения какой-то переменной величины $y = f(x)$ в точке x нам нужно совершить предельный переход

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x).$$

9.1. Определение и геометрический смысл производной функции в точке

Определение 9.1. Производной функции $y = f(x)$ в точке x называется число

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

если такой предел существует.

Задача о проведении касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x тоже приводит к необходимости совершить подобного рода предельный переход.

Рассмотрим, например, функцию $y = ax^2$ и ее график (рис. 9.1). Проведем касательную к этой кривой в точке $M(x, ax^2)$. Касательной к кривой в точке M называется предельное положение секущей MM_1 (если оно существует) при стремлении точки M_1 вдоль кривой к точке M :

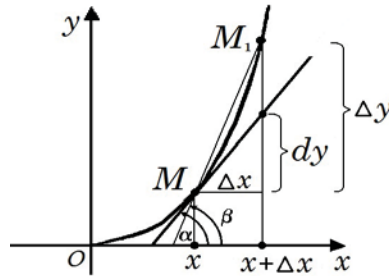


Рис. 9.1

Придадим абсциссе x приращение Δx , получим соответствующее приращение функции Δy и тангенс угла наклона секущей MM_1 :

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x}.$$

В нашем случае $\operatorname{tg} \beta = \frac{a(x + \Delta x)^2 - ax^2}{\Delta x} = 2ax + a\Delta x$.
Предельное положение секущей существует при $\Delta x \rightarrow 0$,
и тангенс угла наклона ее есть

$$\operatorname{tg} \alpha = y'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x} = 2ax.$$

В общем случае, если у функции f существует конечная производная в точке x_0 , то существует и касательная к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0 , и производная равна тангенсу угла α наклона касательной. Уравнение касательной записывается в виде

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Элементарные свойства производной

В этом разделе будем считать, как правило, что функции определены в окрестности рассматриваемой точки.

Теорема 9.1. *Если функция $f(x)$ имеет производную в точке x , то она непрерывна в этой точке.*

Доказательство. Из существования $f'(x)$ следует, что разность

$$\frac{\Delta f(\Delta x)}{\Delta x} - f'(x) = \varepsilon(\Delta x)$$

есть бесконечно малая функция при $\Delta x \rightarrow 0$. Отсюда приращение функции

$$\Delta f(\Delta x) = f'(x)\Delta x + \varepsilon(\Delta x)\Delta x \quad (9.1)$$

есть бесконечно малая функция при $\Delta x \rightarrow 0$. Отсюда

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f(\Delta x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [f(x + \Delta x) - f(x)] = 0,$$

т. е. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x + \Delta x) = f(x)$, что означает непрерывность функции $f(x)$ в точке x . \square

Обратное неверно. Это иллюстрирует следующий пример.

Пример 9.1. Функция $f(x) = |x|$ непрерывна в точке $x = 0$, но производная в точке $x = 0$ не существует, так как не существует предел $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x}$.

Производная и арифметические операции связаны следующими правилами.

Теорема 9.2. Пусть функции f и g имеют производные в точке x . Тогда имеют место соотношения:

1. $(\alpha f(x))' = \alpha f'(x)$.
2. $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$.
3. $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.
4. $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{g(x)f'(x) - g'(x)f(x)}{g(x)^2}$, если $g(x) \neq 0$.

Доказательство. Докажем, например, свойство 4. Рассмотрим разностное отношение:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta [f(x)/g(x)]}{\Delta x} &= \frac{1}{\Delta x} \left(\frac{f(x + \Delta x)}{g(x + \Delta x)} - \frac{f(x)}{g(x)} \right) = \\ &= \frac{1}{\Delta x} \cdot \frac{f(x + \Delta x)g(x) - f(x)g(x + \Delta x)}{g(x)g(x + \Delta x)} = \end{aligned}$$

прибавим и отнимем в числителе $f(x)g(x)$, затем разобьем выражение на две дроби:

$$\begin{aligned}
 &= \left[\frac{\pm f(x)g(x)}{\Delta x g(x)g(x + \Delta x)} \right] = \\
 &= \frac{1}{g(x)g(x + \Delta x)} \left(\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} g(x) - \right. \\
 &\qquad \qquad \qquad \left. - f(x) \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \right)
 \end{aligned}$$

и перейдем в пределу при $\Delta x \rightarrow 0$:

$$\xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g(x)^2}. \quad \square$$

Производные элементарных функций

1. $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
2. $(\sin x)' = \cos x$.
3. $(\cos x)' = -\sin x$.
4. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$.
5. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$.
6. $(e^x)' = e^x$, $(a^x)' = a^x \ln a$.
7. $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$.
8. $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$.

9.2. Дифференцируемые функции. Дифференциал

Определение 9.2. Пусть функции φ и ψ — бесконечно малые в точке x_0 , причем $\psi(x) \neq 0$ в некоторой проколлотой окрестности точки x_0 . Если

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = 0,$$

то говорят, что функция φ *есть бесконечно малая более высокого порядка, чем ψ , в точке x_0* , и обозначают

$$\varphi(x) = o(\psi(x)).$$

Определение 9.3. Рассмотрим приращение функции f в точке x :

$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x).$$

Если это приращение может быть записано в виде

$$\Delta f(x) = A \Delta x + o(\Delta x), \quad (9.2)$$

где A — некоторая константа, а $o(\Delta x)$ — бесконечно малая более высокого порядка, чем Δx , при $\Delta x \rightarrow 0$, то функция f называется *дифференцируемой в точке x* .

Теорема 9.3. *Функция f дифференцируема в точке x тогда и только тогда, когда она имеет производную в этой точке.*

Доказательство. **Необходимость.** Из определения дифференцируемости f следует, что

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = A + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x}.$$

По определению $o(\Delta x)$ имеем $\frac{o(\Delta x)}{\Delta x} \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0$. Тогда

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = A = f'(x).$$

Достаточность. Из существования $f'(x)$ следует, что разность

$$\frac{\Delta f(\Delta x)}{\Delta x} - f'(x) = \varepsilon(\Delta x)$$

есть бесконечно малая функция при $\Delta x \rightarrow 0$. Отсюда приращение функции имеет вид:

$$\Delta f(x) = f'(x)\Delta x + \varepsilon(\Delta x)\Delta x. \quad \square$$

Определение 9.4. Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x , то линейная часть $A \Delta x = f'(x)\Delta x$ приращения $\Delta f(x)$ называется *дифференциалом функции f в точке x* и обозначается

$$df(x) = f'(x)dx. \quad (9.3)$$

Здесь $\Delta x = dx$.

На рис. 9.1 показан дифференциал и видно его геометрическое отличие от приращения функции.

Пример 9.2.

$$d(\operatorname{tg} x) = (\operatorname{tg} x)' dx = \frac{dx}{\cos^2 x},$$

$$d(a^x) = (a^x)' dx = a^x \ln a dx.$$

Элементарные свойства дифференциала

Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы в точке x , тогда имеют место равенства

1. $d[\alpha u(x)] = \alpha du(x)$.
2. $d[u(x) + v(x)] = du(x) + dv(x)$.
3. $d[u(x)v(x)] = u(x) dv(x) + v(x) du(x)$.
4. $d\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right] = \frac{v(x) du(x) - u(x) dv(x)}{v^2(x)}$, если $v(x) \neq 0$.

Доказательства этих свойств легко следуют из определения дифференциала и соответствующих свойств производной.

Пример 9.3.

$$\begin{aligned} d(\operatorname{tg} x) &= d\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) = \frac{\cos x d\sin x - \sin x d\cos x}{\cos^2 x} = \\ &= \frac{(\cos^2 x + \sin^2 x) dx}{\cos^2 x} = \frac{dx}{\cos^2 x}, \end{aligned}$$

$$d(e^x \sin x) = e^x \sin x dx + e^x \cos x dx = e^x (\cos x + \sin x) dx.$$

9.3. Производная сложной функции

Теорема 9.4. Пусть задана сложная функция $F(x) = f(\varphi(x))$. Пусть функция φ имеет производную в точке x_0 , а функция f имеет производную в точке $y_0 = \varphi(x_0)$. Тогда функция F имеет производную в точке x_0 и

$$F'(x_0) = f'(y_0)\varphi'(x_0).$$

Доказательство. Так как функция $f(y)$ дифференцируема в точке y_0 , то

$$\Delta f(y_0) = f'(y_0)\Delta y + \varepsilon(\Delta y)\Delta y,$$

где $\varepsilon(\Delta y) \rightarrow 0$ при $\Delta y \rightarrow 0$. Тогда

$$\Delta F(x_0) = \Delta f(y_0) = f'(y_0)\Delta y + \varepsilon(\Delta y)\Delta y.$$

Разделив на $\Delta x \neq 0$, получим

$$\frac{\Delta F(x_0)}{\Delta x} = f'(y_0)\frac{\Delta y}{\Delta x} + \varepsilon(\Delta y(\Delta x))\frac{\Delta y}{\Delta x}. \quad (9.4)$$

Поскольку существует $\varphi'(x_0)$, функция $\varphi(x)$ непрерывна в точке x_0 (теорема 9.1), следовательно, $\Delta y \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0$. Переходя к пределу в (9.4) при $\Delta x \rightarrow 0$, получим

$$F'(x_0) = f'(y_0)\varphi'(x_0). \quad \square$$

Пример 9.4. Найдём производную сложной функции $F(x) = e^{\sin x}$.

Решение. Данная функция есть суперпозиция двух функций — экспоненты и синуса:

$$F(x) = f(\varphi(x)), \quad \text{где } f(y) = e^y, \quad y = \varphi(x) = \sin x.$$

По правилу дифференцирования сложной функции:

$$F'(x) = e^y(\sin x)' = e^{\sin x} \cos x.$$

9.4. Производная обратной функции

Теорема 9.5. Пусть функция $y = f(x)$ определена, непрерывна и строго монотонна в некоторой окрестности точки x_0 , и пусть $f'(x_0) \neq 0$. Тогда и обратная функция $x = f^{-1}(y)$ имеет производную в точке $y_0 = f(x_0)$, причем

$$[f^{-1}]'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Доказательство. По теореме об обратной функции существует обратная функция $x = f^{-1}(y)$, непрерывная и строго монотонная (например, строго возрастающая) на $[A, B] = [f(a), f(b)]$. Поскольку функции $f(x)$ и $f^{-1}(y)$ непрерывны в точках x_0 и y_0 , $\Delta y = \Delta f(x_0) \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0$; и $\Delta x = \Delta f^{-1}(y_0) \rightarrow 0$ при $\Delta y \rightarrow 0$. Из строгой монотонности следует, что $\Delta x \neq 0 \Leftrightarrow \Delta y \neq 0$.

Рассмотрим

$$\frac{\Delta f^{-1}(y_0)}{\Delta y} = \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)}.$$

Итак, поскольку $\Delta y \rightarrow 0 \Leftrightarrow \Delta x \rightarrow 0$, имеем

$$\begin{aligned} [f^{-1}]'(y_0) &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta f^{-1}(y_0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)} = \frac{1}{f'(x_0)}. \quad \square \end{aligned}$$

Пример 9.5. Пользуясь доказанной теоремой, найдем производные некоторых обратных функций.

1. $y = a^x$, $x = \log_a y$, $y > 0$.

$$\begin{aligned}(\log_a y)' &= \frac{1}{(a^x)'} = \frac{1}{(a^x) \ln a} = \frac{1}{y \ln a}; \\ (\ln y)' &= \frac{1}{y}.\end{aligned}$$

2. $y = \sin x$, $x = \arcsin y$, при $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$.

$$\begin{aligned}(\arcsin y)' &= \frac{1}{(\sin x)'} = \frac{1}{\cos x} = \left[\begin{array}{l} \cos x \geq 0 \\ \text{на } \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \end{array} \right] = \\ &= \frac{1}{+\sqrt{1 - \sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}.\end{aligned}$$

3. $y = \operatorname{tg} x$, $x = \operatorname{arctg} y$, при $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$.

$$(\operatorname{arctg} y)' = \frac{1}{(\operatorname{tg} x)'} = \cos^2 x = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1 + y^2}.$$

9.5. Производные и дифференциалы высших порядков

Определение 9.5. Пусть функция f определена и дифференцируема на интервале (a, b) и $x_0 \in (a, b)$. Производная функции f' в точке x_0 (если она существует) называется *второй производной* функции f и обозначается $f''(x_0)$.

Аналогично определяется *производная n -го порядка* через производную $(n - 1)$ -го порядка.

Пример 9.6.

1. $f(x) = x^2$,
 $f'(x) = 2x$, $f''(x) = 2$, $f'''(x) = 0$, ...
2. $f(x) = a^x$,
 $f'(x) = a^x \ln a$, $f''(x) = a^x \ln^2 a$, ...
3. $f(x) = e^x \sin x$,
 $f'(x) = e^x \sin x + e^x \cos x$, $f''(x) = 2e^x \cos x$.

Определение 9.6. Функция f называется n раз непрерывно дифференцируемой на некотором промежутке, если на этом промежутке она имеет непрерывные производные до n -го порядка включительно.

Определение 9.7. Пусть производная $f'(x)$ дифференцируема в точке $x_0 \in (a, b)$. Тогда дифференциал в этой точке функции dy , если рассматривать его как функцию только от переменной x при фиксированной второй переменной dx , имеет вид (обозначим его δ , в отличие от d для первого дифференциала):

$$\delta(dy) = \delta \left[f'(x)dx \right] \Big|_{x=x_0} = \left[f'(x)dx \right]'_{x=x_0} \delta x = f''(x_0)dx\delta x.$$

Вторым дифференциалом d^2y функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется дифференциал от dy (т. е. дифференциал от первого дифференциала $dy = df(x, dx)$ как функции от переменной x при фиксированной переменной dx):

$$d^2y = d^2 f(x, dx) = \delta(dy) \Big|_{\substack{x = x_0 \\ \delta x = dx}} = f''(x_0)dx^2.$$

Аналогично определяются дифференциалы более высоких порядков:

$$d^n y = \delta (d^{(n-1)} y) \Big|_{\substack{x = x_0 \\ \delta x = dx}} .$$

9.6. Производная функции, заданной параметрически

Пусть функции

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases} \quad (9.5)$$

определены, непрерывны на некотором промежутке (α, β) , а функция $x(t)$ строго монотонна на нем. Тогда для функции $x(t)$ существует обратная функция $t = t(x)$, определенная на некотором промежутке (a, b) и, следовательно, имеет смысл сложная функция $f(x) = y(t(x))$. Эта функция $y = f(x)$ называется функцией, *параметрически* заданной системой (9.5).

Теорема 9.6. Пусть системой функций (9.5) параметрически задана функция $y = f(x)$. Если функции $x(t)$ и $y(t)$ имеют в точке t_0 производные и $x'(t_0) \neq 0$, то параметрически заданная функция $f(x)$ имеет в точке $x_0 = x(t_0)$ производную, и она вычисляется по формуле

$$f'(x_0) = \frac{y'(t_0)}{x'(t_0)}, \quad t_0 = t(x_0).$$

Доказательство. Обратная функция $t = t(x)$ имеет в точке x_0 производную по теореме о производной обратной функции (теорема 9.5):

$$t'(x_0) = \frac{1}{x'(t_0)}.$$

По теореме о производной сложной функции (теорема 9.4) для функции $f(x) = y(t(x))$ получаем:

$$f'(x_0) = y'(t(x_0))t'(x_0) = \frac{y'(t_0)}{x'(t_0)}. \quad \square$$

Пример 9.7. Производная функции, заданной параметрически системой

$$\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \pi,$$

теперь уже может быть вычислена по предыдущей теореме:

$$f'(x) = \frac{\cos t}{-\sin t} = -\frac{x}{\sin \arccos x} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

9.7. Основные теоремы дифференциального исчисления

Теорема 9.7 (теорема Ферма¹²). *Если функция f определена на интервале (a, b) , в точке $\xi \in (a, b)$ принимает наибольшее (наименьшее) значение и имеет в этой точке производную $f'(\xi)$, то $f'(\xi) = 0$.*

Доказательство. Рассмотрим случай наибольшего значения. По условию теоремы для всех $x \in (a, b)$ выполняется неравенство $f(x) \leq f(\xi)$ (рис. 9.2). Тогда

$$\text{если } x < \xi, \quad \text{то } \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \geq 0, \quad (9.6)$$

¹² *Пьер Ферма* (1601–1665) – французский математик, по профессии юрист. Один из создателей теории чисел и аналитической геометрии. Автор трудов по теории вероятностей, исчислению бесконечно малых, оптике.

$$\text{если } x > \xi, \text{ то } \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \leq 0. \quad (9.7)$$

Так как существует производная

$$f'(\xi) = \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi},$$

то существуют и односторонние производные, и они равны производной $f'(\xi)$. Поэтому из неравенства (9.6) следует $f'_-(\xi) = f'(\xi) \geq 0$, а из (9.7) следует $f'_+(\xi) = f'(\xi) \leq 0$. Отсюда имеем $f'(\xi) = 0$. \square

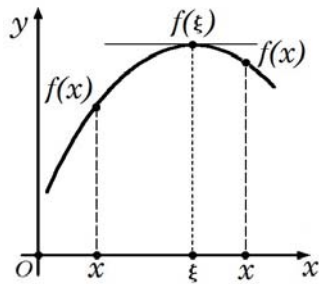


Рис. 9.2

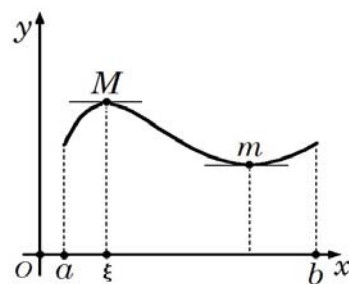


Рис. 9.3

Теорема 9.8 (теорема Ролля¹³). Пусть функция f :

- 1) непрерывна на отрезке $[a, b]$;
- 2) имеет в каждой точке интервала (a, b) производную;

3) имеет на концах отрезка равные значения:

$$f(a) = f(b).$$

Тогда существует точка $\xi \in (a, b)$ такая, что $f'(\xi) = 0$.

¹³ Мишель Ролль (1652–1719) – французский математик.

Доказательство. По второй теореме Вейерштрасса непрерывная функция $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ принимает наибольшее и наименьшее значения в некоторых точках отрезка $[a, b]$ (рис. 9.3). Пусть

$$M = \max_{x \in [a, b]} f(x), \quad m = \min_{x \in [a, b]} f(x).$$

Если $m = M$, то $f(x) \equiv \text{const}$, поэтому $f'(x) \equiv 0$ на (a, b) .

Если $m \neq M$, т. е. $m < M$, то из условия $f(a) = f(b)$ следует, что одно из значений, m или M , функцией $f(x)$ не принимается на концах отрезка $[a, b]$, а принимается внутри интервала (a, b) . Пусть, для определенности, значение M принимается внутри интервала (a, b) , т. е. существует точка $\xi \in (a, b)$ такая, что

$$\max_{x \in [a, b]} f(x) = f(\xi) = M \geq f(x) \quad \text{для всех } x \in (a, b).$$

Так как производная функции $f(x)$ существует в точке ξ , то по теореме Ферма $f'(\xi) = 0$. \square

Теорема 9.9 (теорема Лагранжа¹⁴). Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и имеет производную в каждой точке интервала (a, b) . Тогда существует точка $\xi \in (a, b)$ такая, что

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$$

(рис. 9.4).

¹⁴ Жозеф Луи Лагранж (1736–1813) – выдающийся французский математик, механик, астроном. Наиболее важные труды относятся к вариационному исчислению, к аналитической и теоретической механике. Ему принадлежат выдающиеся исследования по различным вопросам математического анализа, теории чисел, алгебре, дифференциальным уравнениям, математической картографии и пр.

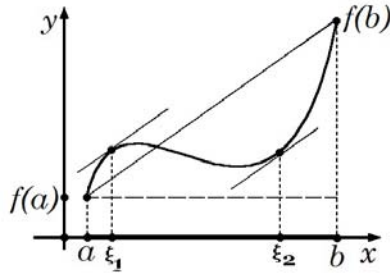


Рис. 9.4

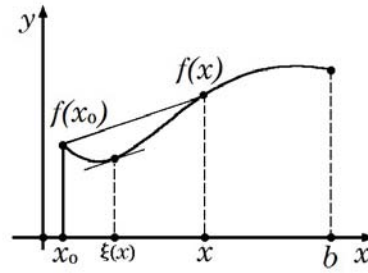


Рис. 9.5

Доказательство. Рассмотрим функцию $F(x) = f(x) - \lambda x$, где параметр λ выберем так, чтобы $F(a) = F(b)$, т. е. $f(a) - \lambda a = f(b) - \lambda b$. Отсюда

$$\lambda = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Для функции F выполнены все условия теоремы Ролля:

- 1) $F(x)$ непрерывна на $[a, b]$;
- 2) существует $F'(x) = f'(x) - \lambda$ в (a, b) ;
- 3) $F(b) = F(a)$.

Тогда по теореме Ролля существует $\xi \in (a, b)$ такая, что $F'(\xi) = 0$, т. е. $f(\xi) = \lambda$. Следовательно,

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \quad \square$$

Замечание. При $a = x_0$, $b = x$, $b - a = \Delta x$ (т. е. при $b = a + \Delta x$) получаем формулу конечных приращений Лагранжа:

$$f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0), \quad \xi = x + \theta\Delta x, \quad 0 < \theta < 1,$$

или

$$\Delta y = f'(x + \theta\Delta x)\Delta x$$

(рис. 9.5).

Приведем три теоремы, которые являются следствиями из теоремы Лагранжа.

Теорема 9.10 (о пределе производной). Пусть функция f :

- 1) непрерывна на $[x_0, b)$;
- 2) дифференцируема на (x_0, b) ;
- 3) существует $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f'(x)$, конечный или нет.

Тогда существует правая производная $f'_+(x_0)$, конечная или нет, и

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0+0} f'(x).$$

Напомним, что $f'_+(x_0) = +\infty$, если функция f непрерывна в точке x_0 справа и существует

$$\lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = +\infty.$$

Пример 9.8. Для функции $f(x) = \sqrt{\sin x^2}$ вычислим $f'_-(0)$, $f'_+(0)$, $f'_-(\sqrt{\pi})$:

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0-0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{x \cos x^2}{\sqrt{\sin x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{x}{|x|} = -1,$$

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0+0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{x}{|x|} = 1,$$

$$f'_-(\sqrt{\pi}) = \lim_{x \rightarrow \sqrt{\pi}-0} \frac{x \cos x^2}{\sqrt{\sin x^2}} = -\infty.$$

Теорема 9.11 (о постоянстве функции). Пусть функция f непрерывна на $[a, b]$ и существует f' хотя бы на (a, b) , равная на нем нулю. Тогда $f(x) = \text{const}$.

Доказательство. Возьмем $x_1, x_2 \subseteq [a, b]$. По теореме Лагранжа $f(x_1) - f(x_2) = f'(c)(x_1 - x_2)$, где c — точка между x_1 и x_2 . Но в интервале (a, b) производная равна нулю, следовательно, $f(x_1) = f(x_2)$. \square

Теорема 9.12 (о монотонности функции). Пусть функция f непрерывна на $[a, b]$ и дифференцируема на (a, b) . Функция f монотонно возрастает (убывает) на $[a, b]$ тогда и только тогда, когда $f'(x) \geq 0$ (≤ 0). Если $f'(x) > 0$ (< 0), то f строго возрастает (убывает) на $[a, b]$.

Доказательство. Пусть функция f возрастает на $[a, b]$, ее приращение в любой точке $x_0 \subseteq (a, b)$ того же знака, что и приращение аргумента, тогда $f'(x_0) \geq 0$.

Пусть $f'(x) \geq 0$. Пусть $x_1 \subseteq [a, b]$, $x_2 \subseteq [a, b]$ и $x_2 > x_1$. По теореме Лагранжа

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1),$$

где c между x_1 и x_2 , тогда $f(x_2) \geq f(x_1)$. \square

Обобщением теоремы Лагранжа служит

Теорема 9.13 (теорема Коши). Пусть функции f и g :

- 1) непрерывны на отрезке $[a, b]$;
- 2) дифференцируемы на интервале (a, b) ;
- 3) производная $g' \neq 0$ во всех точках интервала (a, b) .

Тогда существует такая точка $\xi \in (a, b)$, что имеет место

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Доказательство. Заметим, что $g(b) \neq g(a)$, иначе, согласно теореме Ролля, для функции $g(x)$ нашлась бы точка $\xi \in (a, b)$, в которой $g'(\xi) = 0$.

Рассмотрим функцию $F(x) = f(x) - \lambda g(x)$. Параметр λ подберем так, чтобы $F(a) = F(b)$:

$$f(a) - \lambda g(a) = f(b) - \lambda g(b),$$

следовательно,

$$\lambda = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}, \quad \text{так как} \quad g(b) - g(a) \neq 0.$$

Итак, функция F удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля, поэтому существует точка $\xi \in (a, b)$ такая, что $F'(\xi) = 0$. Отсюда $f'(\xi) - \lambda g'(\xi) = 0$ и

$$\lambda = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}. \quad \square$$

9.8. Раскрытие неопределенностей по правилу Лопиталья

Здесь приведены две теоремы о правилах Лопиталья¹⁵.

Теорема 9.14 (первое правило Лопиталья). Пусть функции f и g :

- 1) дифференцируемы в выколотой окрестности $\check{O}(x_0)$ точки x_0 ;
- 2) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$;
- 3) $g'(x) \neq 0$ для всех $x \in \check{O}(x_0)$;

¹⁵ Гийом Франсуа Лопиталь (1661–1704) – французский математик, автор первого печатного учебника по дифференциальному исчислению (1696).

4) существует предел $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, конечный или бесконечный.

Тогда существует и предел $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ и имеет место равенство

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Доказательство проведем для случая, когда $x \rightarrow x_0 + 0$. Функции f и g непрерывны на некотором интервале (x_0, b) как дифференцируемые на нем функции. Доопределим функции f и g в точке x_0 : $f(x_0) = g(x_0) = 0$. Таким образом, они становятся непрерывными на отрезке $[x_0, b]$. Возьмем любое $x \in (x_0, b)$, тогда на отрезке $[x_0, x]$ функции f и g удовлетворяют условиям теоремы Коши (теорема 9.13) о среднем значении, поэтому существует точка $\xi = \xi(x) \in (x_0, x)$ такая, что

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(\xi(x))}{g'(\xi(x))}.$$

Заметим, что $g(x) \neq 0$, иначе по теореме Ролля $g'(\xi) = 0$ в некоторой точке $\xi \in (x_0, b)$. Ясно, что $\xi(x) \rightarrow x_0$ при $x \rightarrow x_0 + 0$. Поэтому

$$\lim_{\xi \rightarrow x_0 + 0} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} \frac{f'(\xi(x))}{g'(\xi(x))} = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

□

Пример 9.9.

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x \ln a}{1} = \ln a.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x} = \frac{1}{2}.$$

Теорема 9.15 (второе правило Лопиталья). Пусть функции f и g :

1) дифференцируемы на интервале $(a, +\infty)$;

2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \infty$;

3) $g'(x) \neq 0$ на $(a, +\infty)$;

4) существует предел $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, конечный или бесконечный.

Тогда существует и предел $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ и имеет место равенство

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Пример 9.10. Пусть $\alpha > 0, a > 0$.

$$1. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = \left[\frac{+\infty}{+\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\alpha x^\alpha} = 0.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{a^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{nx^{n-1}}{a^x \ln a} = \dots = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{n!}{a^x \ln^n a} = 0.$$

9.9. Формула Тейлора

Пусть у функции f в точке x_0 существует производная $(n - 1)$ -го порядка. Тогда для нее можно записать многочлен

$$T_{n-1}(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \\ + \dots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1},$$

называемый многочленом Тейлора¹⁶. Равенство

$$f(x) = T_{n-1}(x) + R_n(x), \quad x \in O(x_0),$$

справедливое в некоторой окрестности точки x_0 , называется *формулой Тейлора функции f в окрестности точки x_0* ; $T_{n-1}(x)$ — *многочлен Тейлора степени $n - 1$ функции f* , $R_n(x)$ — *остаточный член формулы Тейлора n -го порядка*.

Теорема 9.16. *Пусть функция f имеет n -ю производную в окрестности точки x_0 . Тогда справедлива формула Тейлора*

$$f(x) = T_{n-1}(x) + R_n(x), \quad x \in \check{O}(x_0), \quad (9.8)$$

где ее остаточный член n -го порядка $R_n(x)$ может быть записан в форме Лагранжа:

$$R_n^L(x) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x - x_0)^n, \quad \xi \in (x, x_0). \quad (9.9)$$

¹⁶ Брук Тейлор (1685–1731) — английский математик.

Доказательство проведем для $x > x_0$. Зафиксируем $x \in (x_0, b]$. Представим остаточный член в виде

$$R_n(x) = (x - x_0)^n H,$$

где H зависит от x_0 , x и n .

Рассмотрим функцию

$$\begin{aligned} \Phi(u) = f(u) + \frac{f'(u)}{1!}(x - u) + \frac{f''(u)}{2!}(x - u)^2 + \dots + \\ + \frac{f^{(n-1)}(u)}{(n-1)!}(x - u)^{(n-1)} + (x - u)^n H. \end{aligned}$$

Функция $\Phi(u)$ обладает следующими свойствами:

1) $\Phi(u)$ определена и непрерывна на отрезке $[x_0, x]$, поскольку таковы функции $f(u), f'(u), \dots, f^{(n-1)}(u)$ на отрезке $[x_0, x]$;

2) $\Phi(u)$ имеет производную на интервале (x, x_0) , так как на нем имеет производную n -го порядка функция f ;

$$\begin{aligned} 3) \Phi(x_0) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \\ + \dots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{(n-1)} + (x - x_0)^n H = f(x). \end{aligned}$$

Кроме того, $\Phi(x) = f(x)$.

Следовательно, функция $\Phi(u)$ удовлетворяет на отрезке $[x_0, x]$ условиям теоремы Ролля. Поэтому существует такая промежуточная точка $\xi = x_0 + \theta(x - x_0)$, $0 < \theta < 1$, между точками x_0 и x , что в ней $\Phi'(\xi) = 0$.

Выпишем производную

$$\Phi'(u) = \frac{(x - u)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(u) - n(x - u)^{n-1} H.$$

Так как $\Phi'(\xi) = 0$, то получим уравнение

$$\frac{(x - \xi)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(\xi) - n(x - \xi)^{n-1} H = 0.$$

Отсюда найдем

$$H = \frac{(x - \xi)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(\xi) \frac{1}{n(x - \xi)^{n-1}}.$$

Следовательно, остаточный член запишется в виде

$$R_n(x) = (x - x_0)^n H = \frac{f^{(n)}(\xi)}{(n)!} (x - x_0)^n. \quad \square$$

Замечание. В условиях теоремы 9.16 справедлива формула Тейлора

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \\ + \dots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!} (x - x_0)^{n-1} + R_n^C(x),$$

где

$$R_n^C(x) = \frac{f^{(n)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n-1)!} (1 - \theta)^{n-1} (x - x_0)^n, \quad \theta \in (0, 1),$$

есть остаточный член в форме Коши.

Теорема 9.17. Пусть функция f имеет в точке x_0 производную $(n-1)$ -го порядка. Тогда справедлива формула Тейлора

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \\ + \dots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!} (x - x_0)^{n-1} + R_n^P(x),$$

где $R_n^P(x) = o((x - x_0)^{n-1})$ — остаточный член в форме Пеано¹⁷.

Доказательство. Введем функцию

$$g(x) = f(x) - f(x_0) - \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) - \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 - \dots - \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1}$$

и покажем, что $g(x) = o((x - x_0)^{n-1})$.

Действительно, применив $n - 2$ раза правило Лопиталя, а на последнем шаге определение $f^{(n-1)}(x_0)$, получим

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{(x - x_0)^{n-1}} = 0. \quad \square$$

З а м е ч а н и е 1. Формулу Тейлора функции f в окрестности точки $x_0 = 0$:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{(n-1)} + R_n^L(x),$$

иногда называют *формулой Тейлора–Маклорена*¹⁸ функции f с остаточным членом в форме Лагранжа:

$$R_n^L(x) = \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(\theta x), \quad 0 < \theta < 1.$$

¹⁷ Джузеппе Пеано (1858–1932) — итальянский математик и логик. Известен важными результатами в математическом анализе, теории дифференциальных уравнений, геометрии, разработкой международного языка на основе латыни (Latino sine flexione), а также работами в области логических оснований математики.

¹⁸ Колин Маклорен (1698–1746) — английский математик. Математические исследования относятся к анализу и теории плоских кривых высших порядков, ряд исследований посвящен механике.

З а м е ч а н и е 2. Ф о р м у л а

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}x + \frac{f''(x_0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}x^n + o(x^n)$$

называется *формулой Тейлора–Маклорена функции f с остаточным членом в форме Пеано*.

Ф о р м у л а Т е й л о р а д л я о с н о в н ы х э л е м е н т а р н ы х ф у н к ц и й

1. Функция $f(x) = e^x$.

Вычислим производные: $f^{(n)}(x) = e^x$, $f^{(n)}(0) = 1$,
 $f^{(n)}(\theta x) = e^{\theta x}$. Получим формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{x^n}{n!}e^{\theta x},$$

и в форме Пеано:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{x^n}{n!} + o(x^n).$$

Пример 9.11. Вычислим число e и оценим погрешность вычисления:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{(n-1)!} + R_n(1),$$

$$|R_n(1)| = \frac{1}{n!}e^\theta \leq \frac{e}{n!} \leq \frac{3}{n!}.$$

З а м е ч а н и е. С помощью формулы Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа можно вычислить приближенно значения функций и оценить величину ошибки.

Формулу Тейлора с остаточным членом в форме Пеано удобно использовать как асимптотическую, например, при вычислении пределов, в теории рядов и несобственных интегралов.

2. Функция $f(x) = \sin x$.

Вычислим производные: $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$ и т. д. $f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{\pi n}{2}\right)$. Следовательно,

$$f(x) = \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + R_{2n-1}(x),$$

где

$$\left| R_{2n+1}^L(x) \right| = \left| \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \sin\left(\theta x + (2n+1)\frac{\pi}{2}\right) \right| \leq \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} \rightarrow 0$$

при $x \rightarrow 0$, и

$$R_{2n+1}^P(x) = o(x^{2n}).$$

$$3. f(x) = \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2(n-1)}}{[2(n-1)]!} + R_{2n}(x).$$

$$4. f(x) = \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^n \frac{x^{n-1}}{n-1} + R_n(x).$$

$$5. f(x) = (1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \dots +$$

$$+ \frac{m(m-1)\dots(m-n+2)}{(n-1)!} x^{n-1} + R_n(x).$$

В частном случае

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+x} &= 1 - x + x^2 - \dots + (-1)^n x^n + o(x^n), \\ \frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + \dots + x^n + o(x^n). \end{aligned}$$

Пример 9.12.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\ln(1+x) - \sin x)}{\operatorname{arctg} x - x} = \left[\frac{0}{0} \right].$$

Здесь понадобятся формулы Тейлора:

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3),$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2),$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3).$$

Подставив их в выражение под знаком предела, получим

$$\frac{x(\ln(1+x) - \sin x)}{\operatorname{arctg} x - x} = \frac{x(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)) - x(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3))}{x - \frac{x^3}{3} + o(x^3) - x}.$$

Следовательно,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\ln(1+x) - \sin x)}{\operatorname{arctg} x - x} = \frac{3}{2}.$$