19. Геометрические приложения функций многих переменных

Определение 19.1. Пусть функция $f(x, y)$ определена в некоторой области D и Σ – поверхность, явно заданная функцией $f(x, y)$:

$$\Sigma = \{(x, y, f(x, y)),\ (x, y) \in D\}.$$

Пусть $M_0 \in \Sigma$, т. е. $M_0(x_0, y_0, z_0)$, где $z_0 = f(x_0, y_0)$. *Касательной плоскостью к поверхности* Σ *в точке* M_0 называется такая плоскость

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0,$$

что разность между ее аппликатой z в точке (x, y) и значением функции f в этой точке является бесконечно малой более высокого порядка, чем $\rho = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ при $\rho \to 0$, т. е. $z - f(x, y) = o(\rho)$.

Если функция $f(x, y)$ дифференцируема в точке (x_0, y_0), то плоскость

$$z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0), \qquad (19.1)$$

где $z_0 = f(x_0, y_0)$, является касательной к графику функции $f(x, y)$ в точке (x_0, y_0, z_0), поскольку из определения дифференцируемости функции $f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) получаем, что

$$f(x, y) - z = f(x, y) - z_0 - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) - \\ - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) = o(\rho).$$

Таким образом, геометрический смысл полного дифференциала dz функции в точке (x_0, y_0) состоит в том, что он равен приращению аппликаты плоскости, касательной к графику функции $f(x, y)$ в точке $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, когда приращение функции равно

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

(рис. 19.1).

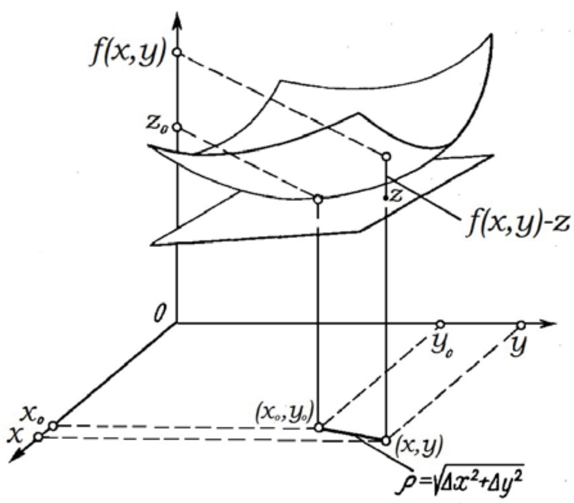

Рис. 19.1

Из геометрии известно, что вектор

$$\boldsymbol{N} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), -1 \right)$$

ортогонален плоскости (19.1). Тогда *уравнение нормали к графику* $f(x, y)$ *в точке* (x_0, y_0), т. е. прямой, перпендикулярной касательной плоскости в точке (x_0, y_0), будет

$$\begin{cases} x = x_0 + t\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \\ y = y_0 + t\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), \\ z = z_0 - t, \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Определение 19.2. Пусть функция $f(x, y, z)$ определена в окрестности точки (x_0, y_0, z_0). Пусть задано направление $\boldsymbol{l} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, где α, β, γ – углы вектора $\boldsymbol{l}$ с осями координат OX, OY, OZ. Тогда $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$. Введем отрезок прямой

$$\begin{cases} x = x_0 + t\cos\alpha, \\ y = y_0 + t\cos\beta, \\ z = z_0 + t\cos\gamma, \end{cases} \qquad 0 \leqslant t \leqslant t_0,$$

лежащий в окрестности точки (x_0, y_0, z_0), соединяющий точки $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $M = (x, y, z)$ и параллельный вектору $\boldsymbol{l}$. Если существует предел

$$\lim_{\rho(M, M_0)\to 0} \frac{f(M) - f(M_0)}{\rho(M, M_0)} =$$
$$= \lim_{t\to +0} \frac{f(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\cos\beta, z_0 + t\cos\gamma) - f(x_0, y_0, z_0)}{t},$$

то этот предел обозначается $\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}(x_0, y_0, z_0)$ и называется *производной по направлению вектора* $\boldsymbol{l}$ *в точке* (x_0, y_0, z_0) (рис. 19.2).

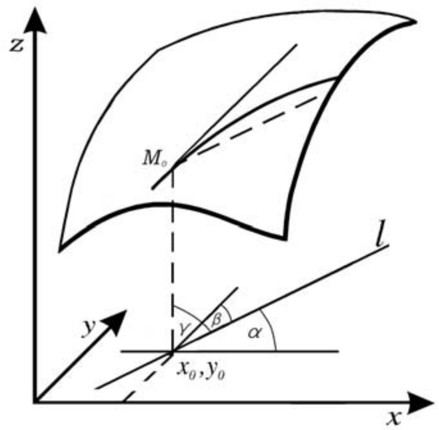

Рис. 19.2

Заметим, что частные производные являются производными по положительным направлениям осей координат.

Теорема 19.1. *Если функция $f(x, y, z)$ дифференцируема в точке (x_0, y_0, z_0), то в этой точке существует производная по любому направлению $\boldsymbol{l} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ и она вычисляется по формуле*

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}(x_0, y_0, z_0) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)\cos\alpha + \\ &+ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)\cos\gamma.\end{aligned}$$

Доказательство. Введем функцию

$$F(t) = f(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\cos\beta, z_0 + t\cos\gamma).$$

Она имеет производную в точке $t_0 = 0$ (по теореме о дифференцируемости сложной функции), которая, с одной стороны, равна

$$F'(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)\cos\alpha +$$
$$+ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)\cos\gamma,$$

а с другой – определяется пределом

$$F'(0) = \lim_{t\to 0} \frac{F(t) - F(0)}{t} =$$
$$= \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\cos\beta, z_0 + t\cos\gamma) - f(x_0, y_0, z_0)}{t}.$$

Поскольку последний предел есть, по определению, производная по направлению $\boldsymbol{l}$, получаем

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}(x_0, y_0, z_0) = F'(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)\cos\alpha +$$
$$+ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)\cos\gamma. \quad \square$$

Определение 19.3. Вектор

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0), \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)\right)$$

называется *градиентом функции* $f(x, y, z)$ *в точке* (x_0, y_0, z_0) и обозначается $\operatorname{grad} f(x_0, y_0, z_0)$.

На производную по направлению вектора $\boldsymbol{l}$ можно смотреть как на скалярное произведение вектора $\boldsymbol{l}$ и вектора $\operatorname{grad} f(x_0, y_0, z_0)$. Тогда если

$$\boldsymbol{l} = \frac{\operatorname{grad} f(x_0, y_0, z_0)}{|\operatorname{grad} f(x_0, y_0, z_0)|},$$

то в этом направлении производная функции $f(x, y, z)$ в точке (x_0, y_0, z_0) будет наибольшей.