порядка, чем dx, или найти предел отношения полученного выражения к $\Delta F(x)$ при $dx \to 0$, который должен быть равен единицы.

Рассмотрим решение некоторых задач физики описанным методом.

3.11.7. Давление жидкости на стенку сосуда

а) Пусть жидкость заполняет сосуд прямоугольного параллелепипеда с удельным весом γ Н/м^3. Подсчитаем давление P на стенку сосуда $ABCD$, где $AB = h$, $BC = \alpha$. Зафиксируем произвольное значение x, обозначим давление на заштрихованную часть стенки через $P(x)$ (Рис.3.116.2).

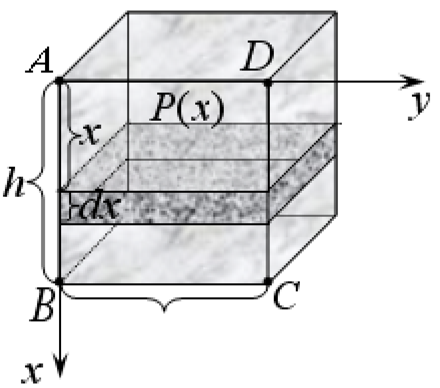

Рис.3.116.2

Изменим x – на величину dx и найдем главную часть приращения давления, пропорциональную dx. Будем считать, что на выделенной полоске глубина жидкости не меняется и равна x.

Так как давление жидкости на малую площадку равно произведению удельного веса на площадь и глубину погружения, то

$$dP(x) = \gamma\alpha x dx$$

Если глубину погружения принять равной $x + \Delta x$, приращение давления на стенку сосуда будет равно $\Delta P(x) = \gamma\alpha(x + \Delta x)dx$.

Легко видеть, что предел отношения $\Delta P(x)$ к $dP(x)$ равен единицы и $dP(x)$ действительно является дифференциалом функции $P(x)$:

$$\lim_{dx\to 0}\frac{\Delta P(x)}{dP(x)} = \lim_{dx\to 0}\frac{\gamma\alpha(x + dx)dx}{\gamma\alpha x dx} = \lim_{dx\to 0}\left(1 + \frac{dx}{x}\right) = 1$$

Интегрируя в пределах от 0 до h, получим

$$P = \int_0^h \gamma\alpha x dx = \frac{\gamma\alpha h^2}{2}.$$

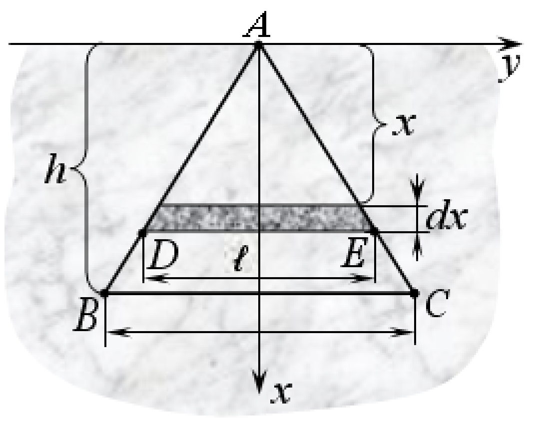

Рис.3.116.3

б) Пусть в воду ($\gamma = 1$) опущен треугольный щит, так что основание треугольника параллельно свободной поверхности воды, а вершина находится на этой поверхности.

Чтобы найти давление P воды на щит, выделим полоску шириной dx на глубине x и вычислим $dP(x)$. Длину ℓ элементарной площадки найдем из подобия треугольников ABC и ADE: $\frac{1}{\alpha}=\frac{x}{h}$, так что $1=\frac{\alpha x}{h}$, а площадь будет равна $\frac{\alpha}{h}xdx$.

Тогда $dP(x)=\frac{\alpha}{h}x^2dx.$ Отсюда

$$P=\int_0^h\frac{\alpha}{h}x^2dx=\left[\frac{\alpha}{h}\cdot\frac{x^3}{3}\right]_0^h=\frac{\alpha h^2}{3}.$$

Рассуждая аналогично, можно найти давление воды на треугольный щит повернутый вершиной вниз, а основание BC находится на уровне свободной поверхности. В этом случае давление уменьшается вдвое (проверьте) и будет равно $P=\frac{\alpha h^2}{6}$. Так можно найти давление на пластинку любой формы, опущенную в жидкость.

3.11.8. Работа необходимая для выкачивания воды из сосуда

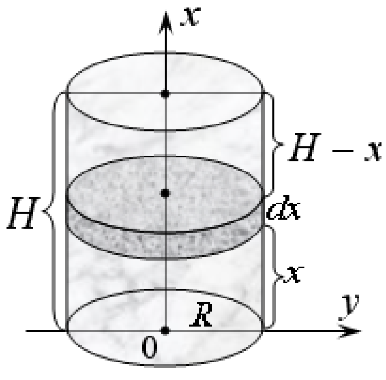

Рис.3.116.4

а) Пусть требуется найти работу, необходимую на выкачивание воды из цилиндрического котла высотой H и радиусом R. Каждую частицу воды надо поднять до края котла, а дальше она вытечет под действием своего веса. Следовательно, надо только преодолеть силу тяжести частицы на вертикальном пути, равном глубине погружения частицы. Фиксируем произвольное значение x, даем бесконечно малое приращение dx. Величина работы является функцией от x – $A(x)$. Найдем главную часть полученного приращения. Работа, необходимая для выкачивания этого слоя будет равна его объему, умноженному на $H-x$, т.е.

$$dA(x)=\pi R^2(H-x)dx$$

Интегрируя в пределах от 0 до H, получим

$$A=\int_0^H\pi R^2(H-x)dx=-\frac{\pi R^2}{2}(H-x)^2\Big|_0^H=\frac{\pi R^2H^2}{2}$$

Для произвольной жидкости будем иметь

$$A=\frac{\pi\gamma R^2H^2}{2},$$

где γ – плотность жидкости.

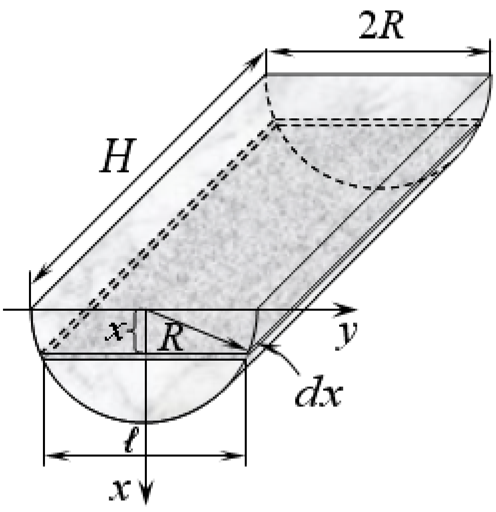

Рис.3.11б.5

б) Найдем работу по выкачиванию ды из корыта, имеющего форму полуцилиндра (Рис.3.11б.5). Фиксируем слой, находящийся на глубине x и имеющий толщину dx. Слой принимаем за прямоугольную плиту. Длина плиты H, а ширину ℓ найдем по теореме Пифагора

$$1 = 2\sqrt{R^2 - x^2}$$

Объем слоя равен $H \cdot 1 \cdot dx = 2H\sqrt{R^2 - x^2}\,dx,$ а главная часть приращения $\Delta A(x)$, равная дифференциалу, будет

$$dA = 2Hx\sqrt{R^2 - x^2}\,dx$$

Интегрируя в границах от 0 до R, получим

$$A = \int_0^R 2Hx\sqrt{R^2 - x^2}\,dx = -\frac{2}{3}H\left(R^2 - x^2\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^R = \frac{2}{3}HR^3.$$

Чем больше размеры корыта (H и R), тем большую работу нужно затратить на выкачивание из него воды.

3.11.9. Сила взаимодействия двух точечных масс

Пусть даны две точки с массами m и M, расстояние между которыми равно – r. По закону Ньютона силу f – взаимодействия двух точечных масс определяют по формуле

$$f = \frac{kmM}{r^2},$$

где k – коэффициент пропорциональности, (предполагается, что плотность постоянна).

а) Найдем силу взаимодествия между стержнем AB, длина которого равна 1 лин.ед. и материальной точки C, лежащей на его продолжении, если масса стержня равна M, масса точки – m и расстояние между точкой C и концом стержня B равно α (Рис. 3.11б.6). Зафиксируем точку D, на расстоянии x от начала координат. Дадим приращение dx. Получим частицу стержня с массой близкой к точечной:

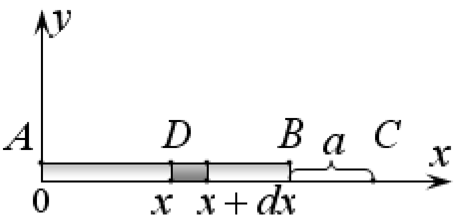

Рис.3.11б.6

$$dm = \frac{M}{1}dx$$

Расстояние от точки *C* до частицы стержня равно $DC = \ell - x + \alpha$. Сила взаимодействия между ними, равная дифференциалу *f* определяется выражением

$$df = k\frac{mMdx}{1(1-x+\alpha)^2}$$

Интегрируя в границах от 0 до ℓ получим

$$f = \int_0^1 k\frac{mMdx}{(1-x+\alpha)^2 1} = k\frac{mM}{1}\int_0^1 \frac{dx}{(1-x+\alpha)^2} = \frac{kmM}{1(1-x+\alpha)}\Bigg|_0^1 = \frac{kmM}{\alpha(\alpha+1)}$$

с удалением точки *C* от стержня *AB* сила взаимодействия между ними уменьшается.

б) Найдем силу, с которой полукольцо радиуса *r* и массой *M* действует на материальную точку массы *m*, находящуюся в его центре (Рис. 3.11б.7). Фиксируем *x* и изменяем его на *d*(*x*). Длина полукольца $\ell = \pi r$. Масса частицы кольца будет приближенно равна

$$dm \cong \frac{M}{1}dx = \frac{M}{\pi r}dx.$$

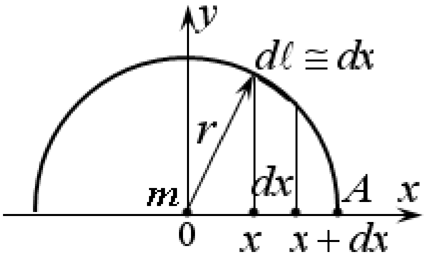

Рис.3.11б.7

Считаем, что при малом приращении *x* $d1 \cong dx$.

По закону взаимодействия двух точечных масс имеем

$$df(x) = \frac{kmMdx}{\pi r \cdot r^2}.$$

Интегрируя в границах от 0 до r получим

$$f = 2\int_0^r \frac{kmMdx}{\pi r^3} = \frac{2kmMx}{\pi r^3}\Bigg|_0^r = \frac{2kmM}{\pi r^2}$$

Таким образом сила взаимодействия между материальной точкой и полукольцом зависит от массы кольца и его радиуса.

3.11.10. Кинетическая энергия тела, вращающегося вокруг неподвижной оси

Если тело вращается вокруг неподвижной оси, то кинетическую энергию вычисляют по формуле

$$W_k = \frac{1}{2}I \cdot \omega^2,$$

где ω – угловая скорость, а *I* момент инерции тела относительно оси вращения. Момент инерции материальной точки с массой m и расстоянием *h* до соответствующей оси равен $I = mh^2$.

а) Найдем кинетическую энергию стержня AB, длины ℓ с поперечным сечением S вращающегося с угловой скоростью ω, вокруг оси Oy. Плотность материала из которого он изготовлен равна γ.

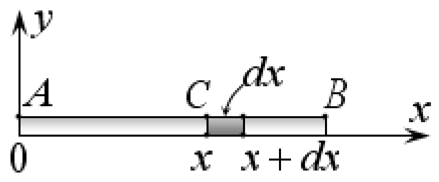

Рис.3.11б.8

Стержень расположен на оси Ox, как изображено на рисунке 3.11б.8. Фиксируем произвольное значение x, даем ему приращение dx. Расстояние до оси вращения частицы стержня равно $h = x = AC$. Найдем ее массу и момент инерции

$$dm = \gamma dv = \gamma S dx;$$

момент инерции $\quad dI = x^2 \gamma S dx,$

тогда дифференциал кинетической энергии будет равен

$$dW(x) = \frac{1}{2} x^2 \omega^2 S \gamma dx.$$

Интегрируя в пределах от 0 до ℓ получим

$$W = \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 \omega^2 S \gamma dx = \frac{\omega^2 S \gamma 1^3}{6}.$$

б) Пусть требуется найти кинетическую энергию пластинки параболической формы, вращающейся вокруг оси Oy с постоянной угловой скоростью ω. Основание сегмента равно α, высота H, толщина пластины b, плотность материала γ (Рис. 3.11б.9). Задачи решаются в общем виде. При необходимости в полученные формулы можно подставить частные значения.

По условию задачи имеем $AB = \alpha$; $BF = H$. Точка B имеет координаты $\left(\frac{a}{2}; H\right)$.

Уравнение параболы $x^2 = 2py$. Найдем параметр – p. Подставим координаты точки B в уравнение параболы

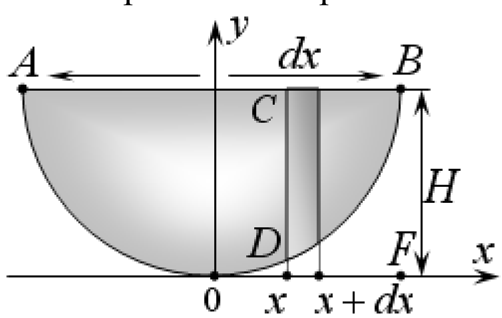

Рис.3.11б.9

$$\frac{\alpha^2}{4} = 2pH,$$

отсюда

$$2p = \frac{\alpha^2}{4H} \quad и \quad x^2 = \frac{\alpha^2 y}{4H}, \; тогда \quad y = \frac{4Hx^2}{\alpha^2}.$$

При произвольно выбранном x на интервале $\left(0; \frac{a}{2}\right)$ длина стержня $CD = H - y = H - \frac{4Hx^2}{\alpha^2}$ (с точностью до бесконечно малых стержень имеет прямоугольную форму), его объем и масса соответственно равны:

$$d\upsilon = b\left(H - \frac{4Hx^2}{\alpha^2}\right)dx; \quad dm = b\gamma\left(H - \frac{4Hx^2}{\alpha^2}\right)dx$$

Найдем приращение момента инерции и кинетической энергии

$$dI = b\gamma\left(H - \frac{4Hx^2}{\alpha^2}\right)x^2dx; \quad dW(x) = \frac{1}{2}b\gamma\left(H - \frac{4Hx^2}{\alpha^2}\right)x^2\omega^2dx.$$

Интегрируя в границах от 0 до $\frac{\alpha}{2}$ получим

$$W = 2\cdot\frac{1}{2}b\gamma\omega^2\int_0^{\frac{\alpha}{2}}\left(Hx^2 - \frac{4Hx^4}{\alpha^2}\right)dx = b\gamma\omega^2\left(H\frac{x^3}{3} - \frac{4Hx^5}{5\alpha^2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\alpha}{2}} =$$

$$= b\gamma\omega^2\left(\frac{H\alpha^3}{24} - \frac{H\alpha^3}{40}\right) = \frac{b\gamma\omega^2H\alpha^3}{60}.$$

В обоих задачах кинетическая энергия зависит от размеров, плотности массы и угловой скорости вращения тел.

3.11.11. Газовые законы

Если температура газа остается постоянной (изотермический процесс), то зависимость между давлением P и объемом V по закону Бойля-Мариотта выражают формулой $PV = C = const$.

Если процесс адиабатический (температура понижается при уменьшении объема и повышается при его увеличении), то объем и давление связаны законом Пуассона:

$$PV^{\gamma} = P_0V_0^{\gamma} = C - const,$$

где γ – постоянная для данного газа величина, обычно больше единицы (так для воздуха $\gamma = 1{,}4$).

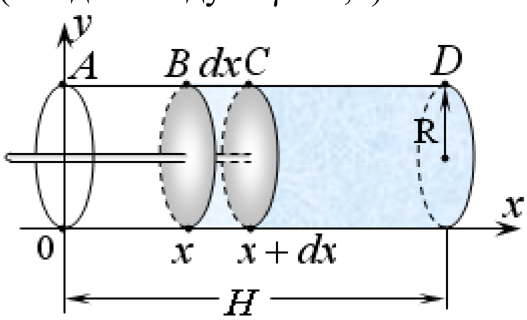

Рис.3.116.10

а) Задача. В цилиндрическом сосуде с радиусом основания R и высотой H заключен атмосферный воздух. Какую работу необходимо затратить, чтобы вдвинуть поршень на h – единиц длины? Процесс протекает изотермически.

Решение. На рисунке $AD = H$. Зафиксировано произвольное x; $AB = x \quad BD = H - x$.

Дано приращение Δx. Давление на единицу поршня

$$P = \frac{C}{V} = \frac{C}{\pi R^2(H - x)};$$

А давление на весь поршень равно

$$P=\frac{C}{\pi R^2(H-x)}\pi R^2=\frac{C}{H-x}.$$

Работа, необходимая для сжатия воздуха на величину *dx* равна

$$dA(x)=P\cdot dx=\frac{C}{H-x}dx,$$

тогда

$$A=\int_0^h\frac{C}{H-x}dx=-C\ln\left|H-x\right|\Big|_0^h=-C\ln\left|H-h\right|+C\ln\left|H\right|=C\ln\left|\frac{H}{H-h}\right|$$

Константу *C* можно определить из условия $P_0V_0=C;\ V_0=\pi R^2H;$ P_0 = 1, 033 кг/см^2. Отсюда $C = 1{,}033\pi R^2H$ и работа равна:

$$A=1{,}033\pi R^2H\ln\left|\frac{H}{H-h}\right|,$$

т.е. чем глубже вдвигается поршень в цилиндр, тем большую требуется совершить работу.

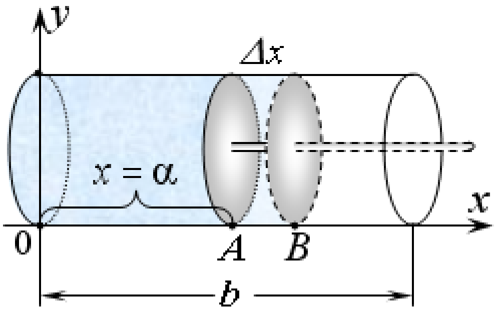

Рис.3.11б.11

б) Задача. В цилиндрическом сосуде, с поперечным сечением S заключен воздух при атмосферном давлении P_0 = 1,033 кг/см^2 или P_o = 10330 кг/м^2.

Какую работу необходимо затратить воздухом в цилиндре чтобы передвинуть поршень из начального положения (точка *A*) до высоты цилиндра *b*, если поместить его в пустоту?

Решение. Если поместить цилиндр в пустоту, объем начнет увеличиваться. Пусть при атмосферном давлении начальное положение поршня находится на расстоянии $OA = \alpha = x$ (Рис. 3.11б.11).

Вычислим работу, которую необходимо затратить на перемещение поршня из точки *A* в точку *B* на расстояние *dx*. По закону Бойля-Мариотта

$$PV=P_0V_0=C;\quad V=S\cdot x$$

Давление на единицу площади $P=\dfrac{C}{Sx}$. Давление на весь поршень $P=\dfrac{C}{x}$, тогда

$$dA(x)=Pdx=\frac{C}{x}dx;\quad A=\int_\alpha^b\frac{C}{x}dx=C\ln x\Big|_\alpha^b=C\ln\left|\frac{b}{\alpha}\right|.$$

$C=P_0V_0;\quad V_0=S\cdot\alpha,$ тогда $C = 1{,}033\cdot S\alpha$. Следовательно

$$A = 1{,}033 \cdot S\alpha \ln\frac{b}{\alpha}.$$

Подсчитаем величину работы при частных данных:
$S = 100$ см^2; $\alpha = 0{,}1$ м; $b = 0{,}2$м.

$$A = 1033 кг/м^2 \cdot 0{,}01 м^2 \cdot 0{,}1 м \cdot \ln\frac{0{,}2}{0{,}1} = 10{,}33 \ln 2 \approx 7{,}16 \ кг \cdot м.$$

3.11.12. Электростатика

Решение задач, связанных с электростатикой опирается на закон Кулона о силе взаимодействия двух электрических зарядов. Пусть ℓ_1 и ℓ_2 – величина зарядов в электростатических единицах, r – расстояние в сантиметрах между ними, ε – диэлектрическая постоянная.

Тогда $F = \dfrac{\ell_1 \ell_2}{\varepsilon \cdot r^2}$

Задача. Два электрических заряда ℓ_1 и ℓ_2 находятся на расстоянии r_0 друг от друга. Разделяющей их средой служит воздух (ε = 1). Сначала оба заряда закреплены неподвижно, затем заряд ℓ_2 освобождается. Под действием силы отталкивания заряд ℓ_2 начинает перемещаться, удаляясь от заряда ℓ_1. Какую работу совершит сила отталкивания, когда заряд удалится на расстояние r и бесконечность?

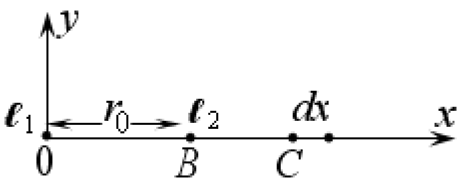

Рис.3.11б.12

Решение. Поместим заряд ℓ_1 в начало координат, а заряд ℓ_2 на расстояние r_0 от него (Рис. 3.11б.12). $OB = r_0$ фиксируем произвольное $x = OC$. Дадим приращение dx, т.е. заряд ℓ_2 переместился на путь dx. По закону Кулона $F = \dfrac{\ell_1 \ell_2}{r^2}$ (в воздухе). Главное приращение величины работы равно

$$dA(x) = F dx = \frac{\ell_1 \ell_2}{x^2} dx$$

отсюда $$A = \int_{r_0}^{r} \frac{\ell_1 \ell_2}{x^2} dx = -\ell_1 \ell_2 \frac{1}{x}\bigg|_{r_0}^{r} = \ell_1 \ell_2 \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}\right)$$

Если $r \to \infty$, то $A = \dfrac{\ell_1 \ell_2}{r_0}$.

Задача. Два электрических заряда ℓ_1 и ℓ_2 электростатических единиц находятся на расстоянии r_0 друг от друга. Каково будет расстояние между зарядами, если приблизив второй заряд к первому затратим

Рис.3.11б.13

работу A_1 Дж?

Решение. Пусть заряд ℓ_1 находится в начале координат (Рис. 3.11б.13).

$$OB = r_0; \quad OC = x.$$

Пусть заряд переместился на величину dx. Тогда $dA(x) = F \cdot dx$.

По закону Кулона получим

$$A = \int_x^{r_0} \frac{\ell_1\ell_2}{x^2}dx = -\ell_1\ell_2\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{x}\right) = \ell_1\ell_2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{r_0}\right)$$

По условию задачи совершенная работа равна A_1 – получим уравнение $\ell_1\ell_2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{r_0}\right) = A_1$, отсюда $\frac{1}{x} - \frac{1}{r_0} = \frac{A_1}{\ell_1\ell_2}$, решая относительно x, получим $x = \frac{r_0\ell_1\ell_2}{r_0A_1 + \ell_1\ell_2}$ *ед.длины.*

3.11.13. Закон Архимеда

По закону Архимеда подъемная сила, действующая на погруженное твердое тело в жидкость, равна весу вытесненной им жидкости. Вес тела равен: $P = S \cdot H \cdot d$, где S – площадь поперечного сечения H – высота, d – удельный вес.

Задача. Шар радиуса R с удельным весом $d = 1$ погружен в воду так, что он касается поверхности. Какую работу надо затратить, чтобы извлечь шар из воды.

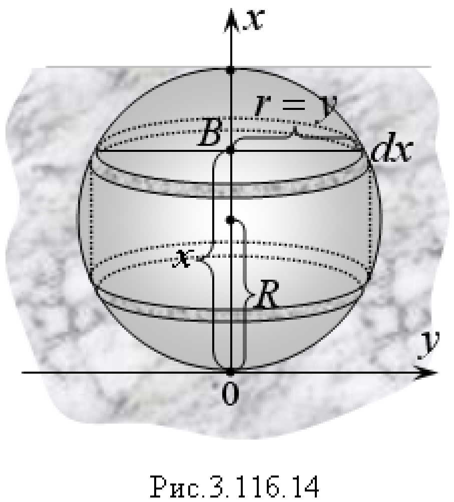

Рис.3.11б.14

Решение. Фиксируем определенное значение $x = OB$, по приращению dx найдем работу, затраченную на поднятие цилиндра высотой dx на величину x.

Основанием цилиндра является круг, радиус которого $r = y$ можно найти из уравнения окружности: $(x - R)^2 + y^2 = R^2$ Раскрывая квадрат получим:

$$x^2 - 2Rx + R^2 + y^2 = R^2;$$

отсюда $y^2 = 2Rx - x^2$,

тогда $dA(x) = \pi y^2 x dx = \pi(2Rx - x^2)x dx$

Работа, затраченная на поднятие шара из воды будет равна

$$A = \pi\int_0^{2R}(2Rx^2 - x^3)dx = \pi\left(\frac{2Rx^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^{2R} = \frac{4}{3}\pi R^4.$$