

11. Определенный интеграл

Определение 11.1. Введем в рассмотрение следующие понятия:

разбиение отрезка $[a, b]$ – это конечное, упорядоченное по возрастанию множество точек

$$T = \{a = x_0, x_1, \dots, x_n = b\};$$

мелкость разбиения T :

$$\lambda = \max_{1 \leq k \leq n} \Delta x_k = \max(x_k - x_{k-1});$$

интегральная сумма функции f , отвечающая разбиению T и выбору точек $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, \dots, n$, есть следующая сумма:

$$\sigma(f, T) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k.$$

Функция f называется *интегрируемой* на отрезке $[a, b]$, если существует число $I \in \mathbb{R}$, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любого разбиения T отрезка $[a, b]$ с мелкостью $\lambda < \delta(\varepsilon)$ и для любого выбора точек $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, \dots, n$, выполняется

$$\left| \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k - I \right| < \varepsilon.$$

Число I называется *определенным интегралом*, или *интегралом Римана*¹⁹, функции f на отрезке $[a, b]$, и интеграл обозначается

$$I = \int_a^b f(x) dx.$$

¹⁹ *Бернхард Риман* (1826–1866) – выдающийся немецкий математик, механик. Его работы оказали сильное влияние на развитие ма-

Постоянная функция $f(x) \equiv c$ интегрируема на любом отрезке $[a, b]$, так как для любого разбиения T

$$\sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k = c \sum_{k=1}^n \Delta x_k = c(b-a) = \int_a^b c dx = I.$$

Теорема 11.1 (необходимое условие интегрируемости).

Если f интегрируема на отрезке $[a, b]$, то она ограничена на этом отрезке.

Доказательство. Пусть функция f не ограничена на отрезке $[a, b]$, но интегрируема на нем. Тогда

$$I - \varepsilon < \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k < I + \varepsilon$$

для какого-то разбиения T при заданном $\varepsilon > 0$ и любом выборе $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$. С другой стороны, найдется отрезок разбиения $[x_{k-1}, x_k]$, на котором f не ограничена, и, следовательно, слагаемое $f(\xi_k) \Delta x_k$, а потому и вся сумма $\sum f(\xi_k) \Delta x_k$ выбором точки ξ_k могут быть сделаны сколь угодно большими (по абсолютной величине), и, значит, сумма выйдет за указанные границы. \square

тематики во 2-й половине XIX в. и в XX в. Он положил начало и преобразовал несколько областей математики: теорию аналитических функций, теорию конформных отображений, аналитическую теорию дифференциальных уравнений, топологию, аналитическую теорию чисел и др.; дал общую идею математического пространства. С его именем связаны такие понятия, как гипотеза Римана, дзета-функция Римана, интеграл Римана, риманова геометрия, риманова поверхность, сфера Римана, тензор кривизны Римана и др.

11.1. Суммы Дарбу. Критерий интегрируемости

Полезным для дальнейшего является понятие *колебания* функции f на отрезке $[a, b]$:

$$\omega(f, [a, b]) = \sup_{x \in [a, b]} f(x) - \inf_{x \in [a, b]} f(x).$$

В частном случае для краткости будем обозначать $\omega(f, [x_{k-1}, x_k]) = \omega_k(f)$.

Пусть $M_k = \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x)$, $m_k = \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x)$.

Суммы

$$S(T) = \sum_{k=1}^n M_k \Delta x_k, \quad s(T) = \sum_{k=1}^n m_k \Delta x_k$$

называются соответственно *верхней и нижней суммами Дарбу*²⁰, соответствующими разбиению T .

Свойство 1. При фиксированном разбиении T суммы Дарбу являются точными границами множества интегральных сумм.

Свойство 2. При добавлении точек деления нижняя сумма Дарбу разве лишь увеличивается, а верхняя разве лишь уменьшается.

Свойство 3. Пусть разбиение T' получено из разбиения T добавлением p точек деления и λ_T — мелкость разбиения T . Пусть M — верхняя граница функции f на $[a, b]$, m — ее нижняя граница. Тогда

$$S(T) - S(T') \leq (M - m)p\lambda_T.$$

²⁰ Жан Гастон Дарбү (1842–1917) — французский математик. Основные труды посвящены дифференциальной геометрии, теории интегрирования, аналитическим функциям, алгебре, механике и математической физике.

Свойство 4. Пусть $I^* = \inf_T \{S(T)\}$, а $I_* = \sup_T \{s(T)\}$.

Тогда

$$I^* = \lim_{\lambda \rightarrow 0} S(T), \quad I_* = \lim_{\lambda \rightarrow 0} s(T).$$

Доказательство. Докажем, что $I^* = \lim_{\lambda \rightarrow 0} S(T)$, т. е.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 \forall T \quad (\lambda < \delta \Rightarrow S(T) - I^* < \varepsilon).$$

Заметим, что это утверждение очевидно для $f(x) \equiv C$ (подумайте, почему), и проведем доказательство для $f(x)$, отличной от константы.

Из определения I^* имеем:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists T^\varepsilon : S(T^\varepsilon) < I^* + \frac{\varepsilon}{3}.$$

Возьмем $\delta \leq \frac{\varepsilon}{3(M-m)p}$, где p — число точек деления T^ε , M, m — точные грани $f(x)$ на $[a, b]$. Возьмем произвольное разбиение T с мелкостью $\lambda < \delta$. Пусть T' содержит все точки разбиений T и T^ε . Рассмотрим

$$0 \leq S(T) - I^* = S(T) - S(T') + S(T') - S(T^\varepsilon) + S(T^\varepsilon) - I^*.$$

Тогда $S(T^\varepsilon) - I^* < \frac{\varepsilon}{3}$ по выбору T^ε , $S(T') - S(T^\varepsilon) \leq 0$, так как T' получено из T^ε добавлением точек разбиения (свойство 2), а по свойству 3

$$S(T) - S(T') \leq (M - m)p\delta \leq (M - m)p \frac{\varepsilon}{3(M - m)p} = \frac{\varepsilon}{3}.$$

Отсюда

$$0 \leq S(T) - I^* \leq \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon. \quad \square$$

Теорема 11.2 (критерий Римана). *Для того чтобы ограниченная функция f была интегрируемой на отрезке $[a, b]$, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ нашлось такое разбиение T отрезка $[a, b]$, при котором*

$$\sum_{k=1}^n \omega_k(f) \Delta x_k < \varepsilon.$$

Доказательство. Необходимость. Поскольку функция интегрируема, найдется I такое, что

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 \quad \forall T, \forall \{\xi_k\}$$

$$\lambda < \delta(\varepsilon) \Rightarrow \left| \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k - I \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Берем любое разбиение T с мелкостью $\lambda < \delta(\varepsilon)$. Тогда

$$I - \frac{\varepsilon}{3} < \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k < I + \frac{\varepsilon}{3}.$$

Поскольку нижняя и верхняя суммы Дарбу являются, при выбранном T , точной нижней и верхней границей множества интегральных сумм, то

$$I - \frac{\varepsilon}{3} \leq s(T) \leq \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k \leq S(T) \leq I + \varepsilon,$$

т. е.

$$S(T) - s(T) = \sum_{k=1}^n \omega_k(f) \Delta x_k \leq \frac{2}{3} \varepsilon < \varepsilon.$$

Достаточность. Для начала заметим, что $I^ = I_*$. Действительно, поскольку*

$$0 \leq I^* - I_* \leq S(T) - s(T),$$

для любого T , а по условию для любого $\varepsilon > 0$ существует разбиение T , для которого $S(T) - s(T) < \varepsilon$, то для любого $\varepsilon > 0$

$$0 \leq I^* - I_* < \varepsilon,$$

т. е. $I^* - I_* = 0$ или $I^* = I_* = I$.

Далее, для любого разбиения T

$$s(T) \leq \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k \leq S(T),$$

а при $\lambda \rightarrow 0$ по свойству 4 сумм Дарбу $s(T) \rightarrow I_* = I$ и $S(T) \rightarrow I^* = I$. Следовательно, по правилу «двух милиционеров», интегральная сумма тоже стремится к I . \square

11.2. Классы интегрируемых функций

Теорема 11.3. *Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она интегрируема на этом отрезке.*

Доказательство. Согласно теореме Кантора, функция f равномерно непрерывна на $[a, b]$. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$, в силу равномерной непрерывности найдется такое $\delta > 0$, что для любых $x', x'' \in [a, b]$, удовлетворяющих условию $|x' - x''| < \delta$, выполняется

$$|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Если взять разбиение отрезка $[a, b]$ с мелкостью $\lambda < \delta$, то из условия $\omega_k(f) < \frac{\varepsilon}{b-a}$ получим

$$\sum_{k=1}^n \omega_k(f) \Delta x_k < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{k=1}^n \Delta x_k = \varepsilon.$$

Следовательно, по критерию интегрируемости, функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$. \square

Теорема 11.4. *Если функция монотонна на отрезке $[a, b]$, то она интегрируема на этом отрезке.*

Доказательство. Пусть функция возрастает на $[a, b]$. Возьмем любое $\varepsilon > 0$ и разбиение T отрезка $[a, b]$ такое, что

$$\lambda < \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}.$$

Из монотонности f следует, что

$$\omega_k(f) = f(x_k) - f(x_{k-1}) > 0.$$

Следовательно,

$$\sum_{k=1}^n \omega_k(f) \Delta x_k \leq \lambda \sum_{k=1}^n \omega_k(f) = \lambda(f(b) - f(a)) < \varepsilon.$$

Отсюда, по критерию интегрируемости, функция f интегрируема на $[a, b]$. \square

Теорема 11.5. *Ограниченная на отрезке $[a, b]$ функция f , имеющая на $[a, b]$ конечное число точек разрыва, интегрируема на $[a, b]$.*