Действительные (вещественные) числа

Представление вещественных чисел в виде бесконечных десятичных дробей

Любое вещественное число a представимо в виде бесконечной десятичной дроби:

$$a = \pm a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots,$$

где из двух знаков $\pm$ берется какой-то один: плюс – для положительных чисел, минус – для отрицательных чисел (знак плюс обычно не пишется).

Рациональные числа представимы в виде периодических, а иррациональные числа – в виде непериодических бесконечных десятичных дробей. Некоторые рациональные числа представимы в виде конечной дроби или, что то же самое, в виде бесконечной дроби с нулем в периоде. Такие числа допускают второе представление – в виде бесконечной десятичной дроби с цифрой 9 в периоде. Например:

$$1/2 = 0,500\dots0\dots = 0,5(0), \quad 1/2 = 0,49999\dots = 0,4(9).$$

При сравнении вещественных чисел будем пользоваться для таких рациональных чисел лишь первой формой записи (с нулем в периоде).

Правило сравнения вещественных чисел

Пусть $a = a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$, $b = b_0, b_1, \dots, b_n, \dots$ – произвольные вещественные числа, представленные в виде бесконечных десятичных дробей. Числа a и b называются *равными* ($a = b$), если они имеют одинаковые знаки и справедливы равенства: $a_k = b_k$, $k = 0, 1, 2, \dots$. В противном случае считается, что $a \neq b$.

При сравнении неравных чисел a и b рассмотрим три случая:

1. a и b – неотрицательные числа. Так как $a \neq b$, то существует натуральное n или $n = 0$ такое,что $a_k = b_k$, $k = 0, 1, \dots, n-1$ и $a_n \neq b_n$. Будем считать, что $a > b$, если $a_n > b_n$, и что $a < b$, если $a_n < b_n$;

2. a – неотрицательное, b – отрицательное число. Будем считать, что $a > b$;

3. a и b – отрицательные числа. Будем считать, что $a > b$, если $|a| < |b|$.

$|a| = a$, если a – неотрицательное число, и равен $-a$, если a – отрицательное число.

Аксиоматическое определение множества вещественных чисел

Пусть на непустом множестве X определены операции сложения (обозначается символом $+$), умножения (обозначается символом $\cdot$) и сравнения (обозначается символом $\leqslant$):

$$X,\ +,\ \cdot,\ \leqslant$$

Это значит, что для любых двух элементов $x, y \in X$ их сумма $x + y$ и произведение $x \cdot y$ снова являются элементами множества X, а также известно, каким отношением они связаны: $x \leqslant y$ или $y \leqslant x$. Относительно введенных операций мы будем предполагать выполнение следующих аксиом.

I. Аксиомы сложения

1. *Существование нейтрального элемента*:

   $\exists\, 0 \in X \quad \forall\, x \in X \quad x + 0 = x.$

2. *Существование обратного элемента*:

   $\forall\, x \in X \quad \exists\, x' \in X \quad x + x' = 0.$

3. *Ассоциативность сложения*:

   $\forall\, x, y, z \in X \quad (x + y) + z = x + (y + z).$

4. *Коммутативность сложения*:

   $\forall\, x, y \in X \quad x + y = y + x.$

Множество X, удовлетворяющее условиям $\mathbf{I}_1$–$\mathbf{I}_3$, называется *группой* относительно операции сложения (*аддитивной группой*).

Множество X, удовлетворяющее условиям $\mathbf{I}_1$–$\mathbf{I}_4$, называется *коммутативной (абелевой)* группой относительно операции сложения.

II. Аксиомы умножения

1. *Существование нейтрального элемента*:

   $\exists\, 1 \in X \quad \forall\, x \in X \quad x \cdot 1 = x.$

2. *Существование обратного элемента*:

   $\forall\, x \in X \setminus \{0\} \quad \exists\, x' \in X \quad x \cdot x' = 1.$

3. *Ассоциативность умножения*:

   $\forall\, x, y, z \in X \quad (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z).$

4. *Коммутативность умножения*:

   $\forall\, x, y \in X \quad x \cdot y = y \cdot x.$

Множество X, удовлетворяющее условиям $\mathbf{II}_1$–$\mathbf{II}_3$, называется *группой* относительно операции умножения (*мультипликативной группой*).

Множество X, удовлетворяющее условиям $\mathbf{II}_1$–$\mathbf{II}_4$, называется *коммутативной (абелевой)* группой относительно операции умножения.

III. Связь между сложением и умножением

$\forall\, x, y, z \in X \quad (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z.$

Аксиома **III** носит название *дистрибутивность* или *распределительный закон.*

Множество X, удовлетворяющее аксиомам **I**–**III**, называется *полем.*

IV. Аксиомы порядка

1. $\forall\, x, y \in X \quad \Rightarrow \quad x \leqslant y$ или $y \leqslant x$.

2. *Рефлексивность*:

   $\forall\, x \in X \quad x \leqslant x$.

3. *Антисимметрия*:

   $x \leqslant y$ и $y \leqslant x \quad \Rightarrow \quad x = y$.

4. *Транзитивность*:

   $x \leqslant y$ и $y \leqslant z \quad \Rightarrow \quad x \leqslant z$.

Множество X, удовлетворяющее условиям $\mathbf{IV}_2$–$\mathbf{IV}_4$, называется *частично упорядоченным множеством.*

Множество X, удовлетворяющее условиям $\mathbf{IV}_1$–$\mathbf{IV}_4$, называется *вполне упорядоченным множеством.*

V. Связь между сложением и отношением порядка

Если $x \leqslant y$, то $\forall\, z \in X \quad \Rightarrow \quad x + z \leqslant y + z$.

VI. Связь между умножением и отношением порядка

Если $x \leqslant y$, то $\forall\, z \geqslant 0 \quad \Rightarrow \quad x \cdot z \leqslant y \cdot z$.

VII. Аксиома непрерывности

Пусть $A \subset X$, $B \subset X$, $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$ и для любых элементов $a \in A$ и $b \in B$ выполняется $a \leqslant b$. Тогда найдется такой элемент $c \in X$, что $a \leqslant c \leqslant b$ при любых $a \in A$ и $b \in B$.

Множество X, удовлетворяющее аксиомам **I**–**VII** и содержащее более одного элемента, называется *множеством действительных (вещественных) чисел.* Его принято обозначать $\mathbb{R}$.

Описанное выше множество десятичных дробей и операций с ними является одной из возможных моделей множества действительных чисел. Другим примером модели действительных чисел является числовая прямая.

Следствия из аксиом действительных чисел

Читателю полезно будет самостоятельно доказать некоторые, часто встречающиеся следствия из приведенной выше аксиоматики.

1. *Единственность нуля.*
2. *Единственность элемента, обратного относительно операции сложения.*
3. *Уравнение $a + x = b$ имеет единственное решение $x = b - a$.*
4. *Единственность единицы.*
5. (Единственность элемента, обратного относительно операции умножения.) *Для любого $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, существует только один элемент, обратный относительно операции умножения.*

Элемент, обратный x относительно умножения, будем обозначать $\frac{1}{x}$. Запись $\frac{y}{x}$ обозначает умножение y на элемент, обратный к x, т. е. $y \cdot \frac{1}{x}$.

6. *Для любого* $a \neq 0$ *уравнение* $a \cdot x = b$ *имеет единственное решение* $x = \frac{b}{a}$.

7. *Для любого* $x \in \mathbb{R}$ *выполняется* $0 \cdot x = 0$.

8. *Для любого* $x \in \mathbb{R}$

$$-x = (-1) \cdot x,$$

где $(-x)$ – обратный к x, а (-1) – обратный к 1.

9. *Если* $x > 0$, *то* $-x < 0$.

10. $0 < 1$.

11. *Если* $x > 0$, *то* $\frac{1}{x} > 0$.

12. (Свойство плотности множества вещественных чисел.) *Для любых* $x, y \in \mathbb{R}$ *(для определенности* $x \leqslant y$*) найдется такой элемент* $z \in \mathbb{R}$, *что* $x \leqslant z \leqslant y$.

13. *Неравенства* $x \leqslant y$, $x - y \leqslant 0$, $-y \leqslant x$, $0 \leqslant y - x$ *равносильны.*

14. *Если* $a \leqslant b \leqslant c \leqslant d$, *то* $d - a \leqslant c - b$.

Некоторые числовые множества

Вещественные числа можно изображать точками на координатной прямой. Поэтому множество всех вещественных чисел называют *числовой прямой*, а сами числа – *точками*, и при рассмотрении числовых множеств часто пользуются их геометрической интерпретацией. Напомним, что *координатной прямой* называется прямая, на которой выбраны точка, являющаяся началом отсчета, масштабный отрезок и положительное направление.

Будем использовать следующие обозначения и терминологию:

$\mathbb{N}$ – *множество всех натуральных чисел*;

$\mathbb{Z}$ – *множество всех целых чисел*;

$\mathbb{Q}$ – *множество всех рациональных чисел*;

$\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ – множество всех вещественных чисел (числовая прямая);

$[a, b]$ – *сегмент* (*отрезок*), т. е. множество всех вещественных чисел x, удовлетворяющих неравенствам $a \leqslant x \leqslant b$;

(a, b) – *интервал*, т. е. множество всех вещественных чисел x, удовлетворяющих неравенствам $a < x < b$;

$[a, b)$, $(a, b]$ – *полуинтервал* (*полусегмент*), т. е. множество всех вещественных чисел x, удовлетворяющих соответственно неравенствам $a \leqslant x < b$, $a < x \leqslant b$;

$(-\infty, a)$, $(a, +\infty)$ – *бесконечные интервалы*;

$(-\infty, a]$, $[a, +\infty)$ – *лучи.*

Сегмент, интервал, полуинтервал, луч, полупрямую и числовую прямую будем называть также *промежутком.*

Элементы топологии на числовой прямой

ε-окрестностью точки x, где $\varepsilon > 0$, называется интервал $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$. Обозначается $O_\varepsilon(x)$.

Множество $X \subseteq \mathbb{R}$ называется *открытым*, если любая точка этого множества входит в него вместе с некоторой своей ε-окрестностью:

$$\forall\, x \in X \; \exists\, \varepsilon > 0 \quad O_\varepsilon(x) \subseteq X.$$

Окрестностью точки x называется любое открытое множество, содержащее точку x. Обозначается $O(x)$.

Проколотой окрестностью (ε-окрестностью) точки x называется множество окрестность (ε-окрестность) с удаленной из нее точкой x:

$$\check{O}(x) = O(x) \setminus \{x\} \quad (\check{O}_\varepsilon(x) = O_\varepsilon(x) \setminus \{x\}).$$

Упражнение. Доказать, что интервал – открытое множество.

Точка x называется *внутренней точкой множества* X, если она входит в это множество вместе с некоторой своей окрестностью:

$$\exists\, O(x) \subseteq X.$$

Тогда открытое множество можно определить как множество, все точки которого – внутренние.

Точка x называется *внешней точкой множества* X, если найдется окрестность точки x, не пересекающаяся с множеством X:

$$\exists\, O(x) \quad O(x) \cap X = \emptyset.$$

Точка x называется *граничной точкой множества* X, если в любой окрестности точки x найдутся точки, принадлежащие X, и точки, не принадлежащие X:

$$\forall\, O(x) \quad O(x) \cap X \neq \emptyset \ \text{ и } \ O(x) \cap CX \neq \emptyset.$$

Точка x называется *изолированной точкой множества* X, если найдется окрестность точки x, в которой нет других точек множества X, кроме точки x.

Точка x называется *предельной точкой множества* X, если в любой окрестности точки x найдется бесконечно много точек множества X. Множество всех предельных точек множества X обозначается X'.

Другое определение: точка x называется *предельной точкой множества* X, если в любой проколотой окрестности точки x найдется хотя бы одна точка множества X:

$$\forall\, O(x) \quad \check{O}(x) \cap X \neq \emptyset.$$

Упражнение. Доказать, что эти определения предельной точки равносильны.

Точка x называется *точкой прикосновения множества* X, если в любой окрестности точки x найдется хотя бы одна точка множества X:

$$\forall\, O(x) \quad O(x) \cap X \neq \emptyset.$$

Совокупность всех конечных точек прикосновения множества X называется *замыканием множества* X. Обозначается $\overline{X}$.

Очевидно, что $X \subseteq \overline{X}$ и $X' \subseteq \overline{X}$.

Множество X называется *замкнутым*, если оно содержит все свои конечные предельные точки, т. е. $X' \subseteq X$.

Другое определение замкнутого множества: множество X называется *замкнутым*, если оно совпадает со своим замыканием, т. е. $X = \overline{X}$.

Упражнение. Доказать, что эти определения замкнутого множества равносильны.

Упражнение. Доказать, что дополнение открытого множества есть множество замкнутое и дополнение замкнутого множества есть открытое множество.