8. Непрерывность функции

8.1. Точки непрерывности и разрыва функции

Определение 8.1. Пусть функция f определена в некоторой окрестности точки x_0. Функция f называется *непрерывной в точке* x_0, если

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Используя определение предела функции по Коши и Гейне, получим следующие развернутые определения непрерывности функции в точке.

Определение 8.2. Функция f называется *непрерывной в точке* x_0 *по Коши,* если

$$\forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists\,\delta(\varepsilon) > 0 \quad \forall\,x \in O_\delta(x_0) \;\Rightarrow\; |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Определение 8.3. Функция f называется *непрерывной в точке* x_0 *по Гейне,* если $\forall\,\{x_n\} \subset O(x_0)$ такой, что $x_n \to x_0$, выполняется $f(x_n) \to f(x_0)$.

Определение 8.4. Точку x_0 будем называть *точкой разрыва функции* f, если функция не определена в этой точке или определена, но не является непрерывной в ней.

Определение 8.5. Пусть x_0 – точка разрыва функции f. Точка x_0 называется *точкой разрыва нулевого рода (точкой устранимого разрыва)*, если у функции f существует предел в этой точке, не равный значению функции в этой точке.

Точка x_0 называется *точкой разрыва первого рода,* если у функции f существуют в этой точке конечные односторонние пределы, не равные между собой.

В противном случае точка x_0 называется *точкой разрыва второго рода функции* f.

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 8.1. *Если функции f и g непрерывны в точке x_0, то непрерывны в точке x_0 и функции $f \pm g$, $f \cdot g$. Если $g(x_0) \neq 0$, то $\frac{f}{g}$ непрерывна в точке x_0.*

Доказательство следует из свойств предела. $\square$

Пусть функция $y = f(x)$ определена в окрестности точки x_0 и переводит эту окрестность в некоторую окрестность точки $y_0 = f(x_0)$, а функция $g(y)$ определена в этой окрестности точки y_0. Тогда для сложной функции $F(x) = g(f(x))$, определенной в окрестности точки x_0, справедлива

Теорема 8.2. *Если функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0, а функция $g(y)$ непрерывна в точке $y_0 = f(x_0)$, то сложная функция $F(x) = g(f(x))$ непрерывна в точке x_0.*

Доказательство. Пусть $x_n \to x_0$. В силу непрерывности в точке x_0 функции f последовательность $y_n = f(x_n)$ сходится к $y_0 = f(x_0)$. Тогда в силу непрерывности функции g в точке y_0 последовательность $g(y_n) = g(f(x_n)) = F(x_n)$ сходится к $g(y_0) = g(f(x_0)) = F(x_0)$. Из определения Гейне следует, что функция $F(x) = g(f(x))$ непрерывна в точке x_0. $\square$

8.2. Функции, непрерывные на отрезке

Определение 8.6. Говорят, что функция f *непрерывна на отрезке* $[a,b]$, если она непрерывна во всех точках интервала (a,b), непрерывна справа в точке a, т. е.

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = f(a),$$

и непрерывна слева в точке b, т. е.

$$\lim_{x\to b-0} f(x) = f(b).$$

Теорема 8.3 (первая теорема Вейерштрасса)**.** *Если функция непрерывна на отрезке, то она ограничена на нем.*

Доказательство. Пусть функция f непрерывна на $[a,b]$. Необходимо доказать, что

$$\exists\, M > 0 \quad \forall\, x \in [a,b] \quad |f(x)| \leqslant M.$$

Доказательство проведем методом от противного. Пусть для каждого $M > 0$ найдется точка $x_M \in [a,b]$ такая, что $|f(x_M)| > M$. Тогда для любого натурального n найдется $x_n \in [a,b]$ такая, что $|f(x_n)| > n$. Мы получим последовательность точек $\{x_n\} \subset [a,b]$, причем последовательность значений функции $f(x_n) \to \infty$. Из ограниченности $\{x_n\}$ следует существование подпоследовательности $\{x_{n_k}\}$ такой, что $x_{n_k} \to c \in [a,b]$. Тогда из непрерывности функции f на отрезке $[a,b]$ и, в частности, в точке c следует, что $f(x_{n_k}) \to f(c)$, в то время как по построению $f(x_{n_k}) \to \infty$. Полученное противоречие доказывает теорему. $\square$

Теорема 8.4 (вторая теорема Вейерштрасса)**.** *Функция, непрерывная на отрезке, достигает на нем свои точные верхнюю и нижнюю грани, т. е. найдутся точки* $c_1, c_2 \in [a,b]$ *такие, что*

$$f(c_1) = \inf_{x\in[a,b]} f(x), \qquad f(c_2) = \sup_{x\in[a,b]} f(x).$$

Доказательство. Докажем существование точки c_2. Пусть

$$M = \sup_{x\in[a,b]} f(x), \quad \text{т. е.}$$

1) $\forall\, x \in [a,b] \quad f(x) \leqslant M,$

2) $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, x_\varepsilon \in [a,b] \quad f(x_\varepsilon) > M - \varepsilon.$

Тогда

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \exists\, x_n \in [a,b] \quad M - \frac{1}{n} < f(x_n) \leqslant M.$$

Таким образом, построена ограниченная последовательность $\{x_n\}$, из которой можно выделить подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ такую, что $x_{n_k} \to c_2 \in [a,b]$. Функция f непрерывна в точке $x = c_2$, следовательно, $f(x_{n_k}) \to f(c_2)$. С другой стороны, при всех k

$$M - \frac{1}{n_k} < f(x_{n_k}) \leqslant M.$$

Из свойств предела следует, что $f(x_{n_k}) \to M$. Следовательно,

$$f(c_2) = M = \sup_{x\in[a,b]} f(x). \qquad \square$$

Теорема 8.5. *Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, ее значения на концах отрезка $f(a)$ и $f(b)$ не равны нулю и имеют разные знаки, то на интервале (a, b) имеется по крайней мере одна точка c такая, что $f(c) = 0$.*

Доказательство. Пусть $f(a) < 0 < f(b)$. Обозначим отрезок $[a, b] = \Delta_0$. Разделим его пополам. Если в середине отрезка Δ_0 функция равна нулю, то теорема доказана. Если нет, то обозначим за $\Delta_1 = [a_1, b_1]$ ту из половин отрезка $[a, b]$, на концах которой функция f имеет разные знаки: $f(a_1) < 0 < f(b_1)$. Разделим отрезок Δ_1 пополам. Если в середине отрезка Δ_1 функция равна нулю, то теорема доказана. Если нет, то обозначим за $\Delta_2 = [a_2, b_2]$ ту из половин отрезка $[a_1, b_1]$, на концах которой функция f имеет разные знаки: $f(a_2) < 0 < f(b_2)$. Рассуждая таким образом, мы либо на каком-то шаге получим точку, в которой функция обращается в ноль, и теорема доказана, либо построим систему вложенных отрезков, длины которых стремятся к нулю и для всех n выполняются неравенства $f(a_n) < 0 < f(b_n)$. Во втором случае по теореме Кантора существует точка c, принадлежащая всем отрезкам Δ_n. Поэтому $c \in \Delta_0 = [a, b]$ и

$$\lim_{n\to\infty} a_n = c = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Тогда, с одной стороны,

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) \leqslant 0 \leqslant \lim_{n\to\infty} f(b_n).$$

С другой стороны, в силу непрерывности функции f в точке c,

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} f(b_n) = f(c).$$

Следовательно, $f(c) = 0$. □

Как следствие, получаем следующую теорему.

Теорема 8.6. *Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, $f(a) = A$, $f(b) = B$, $A < B$ и C – произвольное число такое, что $A < C < B$, то на интервале (a, b) найдется по крайней мере одна точка $x_0 \in (a, b)$, в которой $f(x_0) = C$, т. е. непрерывная на отрезке функция принимает все промежуточные значения между ее значениями на концах отрезка.*

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$F(x) = f(x) - C,$$

где $A < C < B$. Функция F непрерывна на $[a, b]$ и принимает на концах отрезка значения разных знаков:

$$F(a) = f(a) - C = A - C < 0,$$
$$F(b) = f(b) - C = B - C > 0.$$

Тогда, согласно предыдущей теореме, существует точка $x_0 \in (a, b)$ такая, что $F(x_0) = 0$, т. е. $f(x_0) = C$. $\square$

8.3. Равномерная непрерывность функций

Определение 8.7. Функция f называется *равномерно непрерывной на множестве X*, если выполняется следующее условие:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0 \quad \forall x_1 \in X \quad \forall x_2 \in X$$
$$(|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon).$$

Очевидно, что равномерно непрерывная на множестве X функция непрерывна в каждой точке $x \in X$. Обратное, вообще говоря, неверно. Однако справедлива следующая теорема.