

11.6. Методы вычисления определенного интеграла

Метод интегрирования по частям

Теорема 11.12. Для непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a, b]$ функций u, v имеет место формула интегрирования по частям:

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx.$$

Доказательство. По формуле Ньютона–Лейбница

$$\int_a^b [u(x)v(x)]'dx = u(x)v(x)\Big|_a^b.$$

Учитывая, что

$$[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x),$$

получаем

$$\int_a^b [u(x)v(x)]'dx = \int_a^b u'(x)v(x)dx + \int_a^b u(x)v'(x)dx.$$

Отсюда следует требуемое равенство. □

Последнюю формулу удобно записать в виде

$$\int_a^b u(x)dv(x) = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)du(x).$$

Пример 11.1. Вычислим интеграл

$$\begin{aligned} \int_0^\pi x \cos x dx &= \int_0^\pi x d \sin x = x \sin x \Big|_0^\pi - \int_0^\pi \sin x dx = \\ &= - \int_0^\pi \sin x dx = \cos x \Big|_0^\pi = -2. \end{aligned}$$

*Замена переменной под знаком
определенного интеграла*

Теорема 11.13. Пусть функция $x = g(t)$ имеет непрерывную производную на отрезке $[m, M]$ и

$$\min_{t \in [m, M]} g(t) = a, \quad \max_{t \in [m, M]} g(t) = b,$$

причем $g(m) = a$, $g(M) = b$. Тогда

$$\int_a^b f(x) dx = \int_m^M f[g(t)]g'(t) dt$$

при условии, что функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$.

Доказательство. Пусть $\Phi(x)$ – некоторая первообразная функции $f(x)$. Функции $\Phi(x)$ и $x = g(t)$ дифференцируемы на отрезках $[a, b]$ и $[m, M]$ соответственно. Согласно правилу вычисления производной сложной функции,

$$\frac{d}{dt} \Phi(g(t)) = \Phi'(g(t))g'(t).$$

Учитывая, что $\Phi'(g(t)) = \Phi'(x)$ при $x = g(t)$ и что $\Phi'(x) = f(x)$, получим

$$\frac{d}{dt} \Phi(g(t)) = f(g(t))g'(t) dt.$$

Таким образом, функция $\Phi(g(t))$ является на отрезке $[m, M]$ первообразной для функции $f(g(t))g'(t)$ и, следовательно,

$$\int_m^M f(g(t))g'(t) dt = \Phi(g(M)) - \Phi(g(m)) = \Phi(b) - \Phi(a).$$

В итоге, с одной стороны,

$$\int_a^b f(x) dx = \Phi(b) - \Phi(a),$$

а, с другой стороны,

$$\Phi(b) - \Phi(a) = \int_m^M f(g(t))g'(t) dt,$$

что и требовалось.