

## 11.4. Теоремы о среднем значении

**Теорема 11.6.** Пусть функции  $f$  и  $g$  интегрируемы на отрезке  $[a, b]$ ,  $m \leq f(x) \leq M$  на  $[a, b]$ ,  $g(x) \geq 0$  на  $[a, b]$ . Тогда, при  $a < b$ ,

$$m \int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b f(x)g(x) dx \leq M \int_a^b g(x) dx.$$

**Доказательство.** По свойству 5 интеграла функция  $fg$  интегрируема на отрезке  $[a, b]$ . Умножая неравенство  $m \leq f(x) \leq M$  на  $g(x) \geq 0$ , получим

$$mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x).$$

Интегрируя его по отрезку  $[a, b]$ , используя свойства интеграла, получим требуемое неравенство.  $\square$

**Теорема 11.7.** Пусть функция  $f$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$ , а функция  $g$  интегрируема и  $g(x) \geq 0$  на  $[a, b]$ . Тогда существует  $\xi \in [a, b]$  такое, что выполняется равенство

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = f(\xi) \int_a^b g(x) dx.$$

**Доказательство.** Так как  $f$  непрерывна на  $[a, b]$ , то существуют

$$m = \min_{x \in [a, b]} f(x), \quad M = \max_{x \in [a, b]} f(x).$$

В силу предыдущей теоремы имеют место неравенства

$$m \int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b f(x)g(x) dx \leq M \int_a^b g(x) dx.$$

Если  $\int_a^b g(x) dx = 0$ , то в качестве  $\xi$  можно взять любую точку из отрезка  $[a, b]$ . Если  $\int_a^b g(x) dx > 0$ , то

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x) dx}{\int_a^b g(x) dx} \leq M.$$

Таким образом,

$$\frac{\int_a^b f(x)g(x) dx}{\int_a^b g(x) dx} = C \in [m, M].$$

В силу теоремы о промежуточном значении существует  $\xi \in [a, b]$  такое, что  $f(\xi) = C$ . Отсюда получаем требуемое равенство.  $\square$