10. Первообразная, неопределенный интеграл и их свойства

Определение 10.1. Функция $F(x)$, определенная на промежутке $X \subset \mathbb{R}$, называется *первообразной функцией*, или *первообразной* функции $f(x)$ на промежутке X, если она дифференцируема на нем и имеет место равенство $F'(x) = f(x)$ для каждого $x \in X$.

Теорема 10.1. *Если $F(x)$ – какая-либо первообразная функции $f(x)$ на промежутке X, то всякая функция вида*

$$\Phi(x) = F(x) + C$$

также является первообразной для функции $f(x)$ на промежутке X и всякая первообразная функции $f(x)$ представляется в таком виде.

Доказательство. Пусть Φ и F – две первообразные для f на промежутке X, т. е. $\Phi'(x) = f(x)$ и $F'(x) = f(x)$, $x \in X$. Рассмотрим функцию $g(x) = \Phi(x) - F(x)$. Эта функция имеет производную, равную нулю, всюду на промежутке X.

Возьмем любые точки $x_1, x_2 \in X$. Функция $g(x)$ удовлетворяет на отрезке $[x_1, x_2]$ теореме Лагранжа. Следовательно,

$$\exists\, c \in (x_1, x_2): \quad g(x_1) - g(x_2) = g'(c)(x_1 - x_2) = 0.$$

Отсюда вытекает, что $g(x) \equiv \text{const}$ на X, а значит, $\Phi(x) = F(x) + C$. □

Определение 10.2. Пусть $f(x)$ имеет первообразную на некотором промежутке X. *Неопределенным интегралом* от функции f на промежутке X называется совокупность всех первообразных функций для $f(x)$ на X.

Неопределенный интеграл обозначается $\displaystyle\int f(x)dx$. Поэтому

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

где $F(x)$ – одна из первообразных для f на X.

Свойства неопределенного интеграла

1. Если F дифференцируема на X, то

$$\int F'(x)dx = F(x) + C.$$

2. Если функция f имеет первообразную, то

$$d\int f(x)dx = f(x)dx.$$

3. Если f_1 и f_2 имеют первообразные на промежутке X, то функция $af_1 + bf_2$ также имеет первообразную и справедливо равенство

$$\int \big(af_1(x) + bf_2(x)\big)dx = a\int f_1(x)dx + b\int f_2(x)dx.$$

Это равенство нужно понимать как совпадение двух семейств функций.

Д о к а з а т е л ь с т в а этих свойств следуют из определений производной и неопределенного интеграла.

Таблица неопределенных интегралов

Исходя из определения неопределенного интеграла, таблицы производных и правил дифференцирования, можно записать следующие равенства, верные на соответствующих промежутках:

1) $$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1;$$

2) $$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C;$$

3) $$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0, \quad a \neq 1;$$

4) $$\int \sin x\, dx = -\cos x + C;$$

5) $$\int \cos x\, dx = \sin x + C;$$

6) $$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C;$$

7) $$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C;$$

8) $$\int \operatorname{ch} x\, dx = \operatorname{sh} x + C;$$

9) $$\int \operatorname{sh} x\, dx = \operatorname{ch} x + C;$$

10) $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C;$

11) $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C;$

12) $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C;$

13) $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C;$

14) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C;$

15) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C.$

10.1. Некоторые методы вычисления неопределенного интеграла

Интегрирование заменой переменной

Теорема 10.2. *Пусть функции $f(u)$ и $u = g(x)$ определены на некоторых промежутках так, что определена сложная функция $f[g(x)]$. Пусть функция f имеет первообразную F, а функция g дифференцируема, тогда функция $f[g(x)]\cdot g'(x)$ имеет первообразную $\Phi(x) = F[g(x)]$.*

Доказательство. Функции F и f определены на одном промежутке, следовательно, имеет смысл сложная функция $F[g(x)]$. Согласно правилу вычисления производной сложной функции имеем

$$\frac{d}{dx}F[g(x)] = \frac{dF[u]}{du}\Big|_{u=g(x)}\frac{dg(x)}{dx} = \\ = f(u)\Big|_{u=g(x)}g'(x) = f[g(x)]g'(x).$$

Таким образом, функция $f[g(x)]\cdot g'(x)$ имеет в качестве одной из своих первообразных функцию $F[g(x)]$. $\square$

Из теоремы следует, что для вычисления интеграла $\int f[g(x)]g'(x)dx$ сначала вычисляют $\int f(u)du = F(u)+C$, а затем подставляют вместо переменной u функцию $u = g(x)$.

Пример 10.1.

$$\int \frac{xdx}{x^2+a^2} = \Big[u = x^2+a^2;\ du = 2x\,dx\Big] = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u}\Big|_{u=x^2+a^2} = \\ = \frac{1}{2}\ln|u| + C\Big|_{u=x^2+a^2} = \frac{1}{2}\ln(x^2+a^2) + C.$$

Интегрирование по частям

Теорема 10.3. *Если функции u, v дифференцируемы на промежутке X и существует первообразная для $u'v$ на X, то существует первообразная для uv' на X и имеет место формула интегрирования по частям*

$$\int u(x)v'(x)dx = uv - \int u'(x)v(x)dx.$$