Последовательности комплексных чисел

Определение 2. Последовательность комплексных чисел z_n называется *сходящейся* к комплексному числу a, если

$$\forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists\,N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \forall\,n > N(\varepsilon) \quad |z_n - a| < \varepsilon.$$

При этом пишут

$$\lim_{n\to\infty} z_n = a \qquad \text{или} \qquad z_n \to a.$$

Другими словами, последовательность z_n сходится к a, если последовательность $|z_n - a|$ сходится к нулю.

Геометрически это означает, что все элементы последовательности, за исключением конечного их числа, лежат в ε-окрестности точки a.

Теорема 1. *Последовательность $z_n = x_n + iy_n$ сходится к числу $a = \alpha + i\beta$ тогда и только тогда, когда одновременно $x_n \to \alpha$ и $y_n \to \beta$.*

Доказательство. *Необходимость* следует из очевидных неравенств

$$|x_n - \alpha| \leqslant \sqrt{(x_n-\alpha)^2 + (y_n-\beta)^2} = |z_n - a| \qquad \text{и} \qquad |y_n - \beta| \leqslant |z_n - a|.$$

Достаточность получается из оценки

$$|z_n - a| = \sqrt{(x_n-\alpha)^2 + (y_n-\beta)^2} \leqslant |x_n - \alpha| + |y_n - \beta|. \qquad \square$$

Доказанное свойство соответствует покоординатной сходимости последовательности векторов.

Сходимость последовательности комплексных чисел можно описать и на языке последовательностей модулей и аргументов.

Теорема 2. *Последовательность $z_n = r_n e^{i\varphi_n}$ сходится к числу $a = re^{i\varphi}$ тогда и только тогда, когда одновременно $r_n \to r$ и $\varphi_n \to \varphi$ (при надлежащем выборе последовательности φ_n).*

Доказательство. *Достаточность.* Из тригонометрической формы последовательности z_n и непрерывности косинуса и синуса получаем

$$z_n = r_n \cos\varphi_n + ir_n \sin\varphi_n \quad \to \quad r\cos\varphi + ir\sin\varphi = a,$$

что, в силу предыдущей теоремы, означает сходимость z_n к a.

Необходимость.

Определение 3. Последовательность $\{z_n\}$ называется *ограниченной*, если найдётся такое положительное число R, что все элементы последовательности лежат в круге с центром в нуле радиуса R, т.е.

$$\exists\,R > 0 \quad \forall\,n \in \mathbb{N} \quad |z_n| < R.$$

Как и в случае действительных чисел, сходящаяся последовательность ограничена, но не всякая ограниченная последовательность сходится. Справедлива

Теорема 3 (Больцано–Вейерштрасса). *Из любой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.*

Доказательство получается последовательным применением теоремы Больцано–Вейерштрасса к последовательностям действительных и мнимых частей последовательности z_n. $\square$

Также имеют место

- *критерий Коши* сходимости последовательности комплексных чисел, что означает *полноту* пространства $\mathbb{C}$;
- *арифметические операции* над пределами: если $z_n \to a$ и $\zeta_n \to \lambda$, то

$$z_n \pm \zeta_n \to a \pm \lambda, \qquad z_n \cdot \zeta_n \to a \cdot \lambda, \qquad \frac{z_n}{\zeta_n} \to \frac{a}{\lambda}, \text{ если } \zeta_n, \lambda \neq 0.$$

Бесконечно большие последовательности и бесконечно удалённая точка

Определение 4. Последовательность $\{z_n\}$ называется *бесконечно большой*, если

$$\forall\, E > 0 \quad \exists\, N(E) \in \mathbb{N} \quad \forall\, n > N(E) \quad |z_n| > E.$$

Это обозначается

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \infty \qquad \text{или} \qquad z_n \to \infty.$$

Другими словами, последовательность z_n бесконечно большая, если последовательность $|z_n|$ бесконечно большая.

Свойства бесконечно больших последовательностей:

1. $z_n \to \infty \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{z_n} \to 0.$
2. $z_n \to \infty, \quad \zeta_n \to a \quad \Rightarrow \quad (z_n + \zeta_n) \to \infty.$
3. $z_n \to \infty, \quad \zeta_n \to a \neq 0 \quad \Rightarrow \quad z_n \cdot \zeta_n \to \infty.$
4. $z_n \to \infty, \quad \zeta_n \to a \neq \infty \quad \Rightarrow \quad z_n/\zeta_n \to \infty.$
5. $z_n \to \infty, \quad \zeta_n \to a \neq \infty \quad \Rightarrow \quad \zeta_n/z_n \to 0.$

В ряде случаев удобно рассматривать бесконечно большую последовательность как сходящуюся к некоторой точке, называемой *бесконечно удалённой точкой*; её обозначают $z = \infty$.

Точке $z = \infty$, как и точке 0, не поставлено в соответствие никакого значения аргумента, а также никакого значения действительной и мнимой частей. Модуль бесконечно удалённой точки считается равным бесконечности.

Точка $z = \infty$ не участвует в алгебраических операциях. Она является идеальным объектом, замыкающим множество $\mathbb{C}$.

Множество комплексных чисел с присоединённой к нему бесконечно удалённой точкой будем называть *замкнутым множеством комплексных чисел* и обозначать $\overline{\mathbb{C}}$.

В $\overline{\mathbb{C}}$ справедлив `принцип компактности`: *любое бесконечное подмножество $\overline{\mathbb{C}}$ имеет предельную точку, принадлежащую $\overline{\mathbb{C}}$.*

Стереографическая проекция

Для геометрической интерпретации $\overline{\mathbb{C}}$ удобно использовать сферическое изображение. Для этого в трёхмерном пространстве введём декартову систему координат $O\xi\eta\zeta$ и наложим на плоскость $O\xi\eta$ комплексную плоскость, так что действительная ось Ox совпадает с $O\xi$, а мнимая ось Oy – с осью $O\eta$.

Рассмотрим сферу S: $\xi^2+\eta^2+(\zeta-1)^2 = 1$. Она касается комплексной плоскости в начале координат. Возьмём на комплексной плоскости произвольную точку $z = (x, y)$ и поставим ей в соответствие точку $M(\xi;\eta;\zeta)$ пересечения отрезка прямой, соединяющей точку z с «северным полюсом» сферы $N(0; 0; 2)$.

Такое соответствие

$$z = x + iy \in \mathbb{C} \quad \to \quad M(\xi;\eta;\zeta) \in S$$

называется *стереографической проекцией*, сферу S называют *сферой Римана*.

Уравнение прямой Nz:

$$Nz = N + t \cdot \overrightarrow{Nz} = (0; 0; 2) + t(x; y; -2) = (tx; ty; 2 - 2t).$$

Подставляя эти уравнения в уравнение сферы, найдём значение параметра, соответствующее точке пересечения прямой и сферы:

$$t = \frac{4}{x^2 + y^2 + 4},$$

и уравнения стереографической проекции (координаты точки M):

$$\xi = \frac{4x}{x^2 + y^2 + 4}, \qquad \eta = \frac{4y}{x^2 + y^2 + 4}, \qquad \zeta = \frac{2(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2 + 4}. \tag{3}$$

Эти функции обратимы: из последнего уравнения получаем $x^2 + y^2 + 4 = \frac{8}{2-\zeta}$, тогда

$$x = \frac{2\xi}{2 - \zeta}, \qquad y = \frac{2\eta}{2 - \zeta}. \tag{4}$$

Таким образом, уравнения (3) и (4) устанавливают взаимно однозначное соответствие комплексной плоскости $\mathbb{C}$ и сферы с выколотым северным полюсом $S\backslash N$.

Поставим в соответствие точке N бесконечно удалённую точку комплексной плоскости $z = \infty$, тем самым устанавливается взаимно-однозначное соответствие $\overline{\mathbb{C}}$ и S. Комплексную плоскость с присоединённой к ней бесконечно удалённой точкой называют *расширенной комплексной плоскостью.*

Теперь сходимость последовательности z_n к бесконечно удалённой точке можно представлять как сходимость последовательности стереографических образов M_n к полюсу N на сфере Римана.

На плоскости расстояние между точками измеряется в *евклидовой метрике*

$$\rho(z_1, z_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Можно ввести ещё одну метрику – *сферическую*, равную расстоянию между образами этих точек на сфере в евклидовой метрике в пространстве $\mathbb{R}^3$.