Предел числовой последовательности

Если каждому натуральному $n \in \mathbb{N}$ поставлено в соответствие число $x_n \in \mathbb{R}$, то совокупность $x_1, x_2, \ldots, x_n \ldots$ называется *числовой последовательностью* и обозначается $\{x_n\}$, а число x_n называется *n-м элементом* последовательности.

1 Понятие предела последовательности

Определение 1. Число a называется *пределом последовательности* $\{x_n\}$ *при* $n \to \infty$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad : \forall n > N(\varepsilon) \quad \Rightarrow \quad |x_n - a| < \varepsilon.$$

Тот факт, что a – предел последовательности $\{x_n\}$ при $n \to \infty$, обозначается следующим образом:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

Определение может быть также сформулировано на языке окрестностей:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad : \forall n > N(\varepsilon) \quad \Rightarrow \quad x_n \in O_\varepsilon(a).$$

Это условие означает, что в любой окрестности числа a находятся все элементы последовательности, кроме, может быть, конечного числа. Можно сказать так: за пределами ε-окрестности числа a могут находиться только элементы $x_1, x_2, \ldots, x_{N(\varepsilon)}$.

Пример 1. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3+7n+3}{2n^3+5n+4} = \frac{1}{2}.$$

Р е ш е н и е. По определению предела последовательности надо по любому числу $\varepsilon > 0$ найти такое натуральное число N, чтобы для любых $n > N$ выполнялось неравенство

$$\left|\frac{n^3+7n+3}{2n^3+5n+4} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon.$$

Преобразуем его левую часть:

$$\left|\frac{n^3+7n+3}{2n^3+5n+4} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{2n^3+14n+6-2n^3-5n-4}{4n^3+10n+8}\right| = \frac{9n+2}{4n^3+10n+8}.$$

Заметим, что

$$\frac{9n+2}{4n^3+10n+8} \leqslant \frac{11n}{4n^3} = \frac{11}{4n^2}.$$

Если число N выбрать так, чтобы для $n > N$ выполнялось неравенство $\frac{11}{4n^2} < \varepsilon$, то тем более для этих n будет выполняться неравенство $\frac{9n+2}{4n^3+10n+8} < \varepsilon$. Это верно при $n > \sqrt{\frac{11}{4\varepsilon}}$. Таким образом, в качестве N можно взять целую часть числа $\sqrt{\frac{11}{4\varepsilon}}$.

Определение 2. Последовательность $\{x_n\}$ называется *сходящейся,* если существует число a такое, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, т. е.

$$\exists a \in \mathbb{R} \ \ \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \ \ \forall n > N(\varepsilon) \quad |x_n - a| < \varepsilon.$$

2 Свойства сходящихся последовательностей

Свойство 1. *Если последовательность $\{x_n\}$ сходится, то ее предел единственный.*

Доказательство проведем от противного. Пусть

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a < b = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

Возьмем $\varepsilon = \frac{b-a}{3} > 0$, тогда $O_\varepsilon(a) \cap O_\varepsilon(b) = \emptyset$ в силу выбора ε. С другой стороны, по определению сходимости, для $\varepsilon = \frac{b-a}{3} > 0$

$$\exists\, N_1 : \quad \forall\, n > N_1 \quad x_n \in O_\varepsilon(a),$$

$$\exists\, N_2 : \quad \forall\, n > N_2 \quad x_n \in O_\varepsilon(b).$$

Следовательно, для $n > N_1 + N_2 \quad x_n \in O_\varepsilon(a) \cap O_\varepsilon(b)$, что означает непустоту этого пересечения. Получено противоречие. □

Определение 3. Последовательность $\{x_n\}$ называется *ограниченной,* если

$$\exists\, M > 0 \quad : \ \forall\, n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad |x_n| \leqslant M.$$

Свойство 2. *Если последовательность сходится, то она ограничена.*

Доказательство. Пусть

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

Возьмем $\varepsilon = 1$. Тогда существует номер N такой, что при всех $n > N$

$$|x_n - a| < 1.$$

Так как

$$|x_n| = |x_n - a + a| \leqslant |x_n - a| + |a|,$$

то

$$|x_n| < 1 + |a|,$$

если $n > N$. Положим

$$M = |x_1| + \ldots + |x_N| + 1 + |a|.$$

Тогда

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad |x_n| \leqslant M,$$

что означает ограниченность $\{x_n\}$. □

Свойство 3. *Если $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$ для всех n и*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n = a, \quad \text{то} \quad \lim_{n\to\infty} y_n = a.$$

Доказательство. Возьмем любое $\varepsilon > 0$. Тогда из условия $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ следует, что

$$\exists\, N_1 \quad : \ \forall\, n > N_1 \quad \Rightarrow \quad a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon,$$

а из условия $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$ следует, что

$$\exists\, N_2 \quad : \ \forall\, n > N_2 \quad \Rightarrow \quad a - \varepsilon < z_n < a + \varepsilon.$$

Следовательно, при всех $n > N_1 + N_2$

$$a - \varepsilon < x_n \leqslant y_n \leqslant z_n < a + \varepsilon,$$

т. е.

$$a - \varepsilon < y_n < a + \varepsilon,$$

а это и означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$. □

Свойство 4. *Если последовательности* $\{x_n\}$ *и* $\{y_n\}$ *сходятся, то сходится последовательность* $\{x_n + y_n\}$ *и*

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. Возьмем любое $\varepsilon > 0$. Тогда из первого условия следует, что

$$\exists\, N_1 \quad : \ \forall\, n > N_1 \quad \Rightarrow \quad |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2},$$

а из второго – что

$$\exists\, N_2 \quad : \ \forall\, n > N_2 \quad \Rightarrow \quad |y_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Учитывая, что при всех n

$$|x_n + y_n - (a + b)| \leqslant |x_n - a| + |y_n - b|,$$

при $n > N_1 + N_2$

$$|x_n + y_n - (a + b)| < \varepsilon,$$

а это означает, что

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = a + b = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n.$$ □

Свойство 5. *Если последовательности* $\{x_n\}$ *и* $\{y_n\}$ *сходятся, то сходится последовательность* $\{x_n y_n\}$ *и*

$$\lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Доказательство. Произведем оценку модуля $|x_n y_n - ab\,|$:

$$|x_n y_n - ab\,| = |x_n y_n \mp x_n b - ab\,| = |x_n(y_n - b) + (x_n - a)b\,| \leqslant |x_n|\,|y_n - b\,| + |x_n - a|\,|b\,|.$$

Из сходимости $\{x_n\}$ следует ее ограниченность, т. е.

$$\exists\, M > 0 \ : \ \forall\, n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad |x_n| \leqslant M.$$

Таким образом,

$$|x_n y_n - ab\,| \leqslant M|y_n - b\,| + |x_n - a|\,|b|.$$

Возьмем любое $\varepsilon > 0$. Из условия $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ следует, что

$$\exists\, N_1 \ : \ \forall\, n > N_1 \quad \Rightarrow \quad |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2(|b\,| + 1)},$$

а из условия $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$ следует, что

$$\exists\, N_2 \ :\ \forall\, n > N_2 \quad \Rightarrow \quad |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

Тогда для $n > N_1 + N_2$

$$|x_n y_n - ab\,| < \varepsilon,$$

а это означает, что

$$\lim_{n\to\infty} (x_n y_n) = ab = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n. \qquad \square$$

Свойство 6. *Если последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ сходятся,*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \quad \lim_{n\to\infty} y_n = b \neq 0,$$

то сходится последовательность $\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$ и

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}.$$

Доказательство. Произведем оценку модуля $\left|\dfrac{x_n}{y_n} - \dfrac{a}{b}\right|$:

$$\left|\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}\right| = \left|\frac{x_n b - y_n a}{y_n b}\right| = \left|\frac{x_n b - ab + ab - y_n a}{y_n b}\right| =$$

$$= \left|\frac{(x_n - a)b + a(b - y_n)}{y_n b}\right| \leqslant \frac{|x_n - a|\,|b\,| + |a|\,|y_n - b\,|}{|y_n|\,|b\,|}.$$

Из условия $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$ следует, что

$$\exists\, N_0 \ :\ \forall\, n > N_0 \quad \Rightarrow \quad \big|\,|y_n| - |b\,|\,\big| \leqslant |y_n - b| < \frac{|b\,|}{2},$$

т. е. $|y_n| > \frac{|b|}{2}$. Следовательно, при $n > N_0$

$$\frac{1}{|y_n|} < \frac{2}{|b|}.$$

Из этого же условия следует, что

$$\exists\, N_1 \ :\ \forall\, n > N_1 \quad \Rightarrow \quad |y_n - b| < \frac{\varepsilon b^2}{4(|a| + 1)}.$$

Из условия $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ следует, что

$$\exists\, N_2 \ :\ \forall\, n > N_2 \quad \Rightarrow \quad |x_n - a| < \frac{\varepsilon |b\,|}{4}.$$

Тогда при $n > N_0 + N_1 + N_2$

$$\left|\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}\right| < \varepsilon,$$

а это означает, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}. \qquad \square$$

3 Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности

Определение 4. Последовательность $\{x_n\}$ называется *бесконечно малой*, если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Развернутое определение:

$$\forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists\, N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \;:\; \forall\, n > N(\varepsilon) \quad \Rightarrow \quad |x_n| < \varepsilon.$$

Свойство 1. *Сумма бесконечно малых последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ есть бесконечно малая последовательность.*

Доказательство. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Для него

$$\exists\, N_1 \;:\; \forall\, n > N_1 \quad \Rightarrow \quad |x_n| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\exists\, N_2 \;:\; \forall\, n > N_2 \quad \Rightarrow \quad |y_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда $\forall\, n > N_1 + N_2$

$$|x_n + y_n| \leqslant |x_n| + |y_n| < \varepsilon. \qquad \square$$

Свойство 2. *Произведение $\{x_n y_n\}$ бесконечно малой последовательности $\{x_n\}$ на ограниченную последовательность $\{y_n\}$ есть бесконечно малая последовательность.*

Доказательство. Из ограниченности $\{y_n\}$ следует, что

$$\exists\, M > 0 \;:\; \forall\, n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad |y_n| \leqslant M.$$

Из условия $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ следует, что при любом $\varepsilon > 0$

$$\exists\, N \in \mathbb{N} \;:\; \forall\, n > N \quad \Rightarrow \quad |x_n| < \frac{\varepsilon}{M}.$$

Но тогда

$$\forall\, n > N \quad \Rightarrow \quad |x_n y_n| = |x_n| \cdot |y_n| < \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon,$$

т. е. $\{x_n y_n\}$ – бесконечно малая последовательность. $\square$

Определение 5. Последовательность $\{x_n\}$ называется *бесконечно большой*, если

$$\forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists\, N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \;:\; \forall\, n > N(\varepsilon) \quad \Rightarrow \quad |x_n| > \varepsilon.$$

Этот факт записывается так:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty.$$

Свойство 3. *Последовательность $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$, обратная к бесконечно большой последовательности $\{x_n\}$, есть бесконечно малая последовательность.*

Доказательство. Поскольку последовательность $\{x_n\}$ – бесконечно большая, все ее элементы, начиная с некоторого номера n_0, не равны нулю. Для $n > n_0$ рассмотрим последовательность $y_n = \frac{1}{x_n}$. Возьмем $\varepsilon > 0$ и рассмотрим $E = \frac{1}{\varepsilon} > 0$. Для него по определению бесконечно большой последовательности найдется номер $N(E)$ такой, что

$$|x_n| > E, \quad \text{при} \;\; n > N(E).$$

Возьмем теперь $n > \max\{n_0, N(E)\}$ и рассмотрим

$$|y_n| = \frac{1}{|x_n|} < \frac{1}{E} = \varepsilon,$$

т. е. по определению последовательность $\{y_n\}$ – бесконечно малая. $\square$

Свойство 4. *Пусть* $\{x_n\}$ *– бесконечно малая последовательность и такая, что* $x_n \neq 0$ *при* $n > n_0$. *Тогда последовательность* $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$, *обратная к* $\{x_n\}$, *есть бесконечно большая последовательность.*

Доказательство. Положим $y_n = \frac{1}{x_n}$ при $n > n_0$. Возьмем $E > 0$ и рассмотрим $\varepsilon = \frac{1}{E} > 0$. Для него по определению бесконечно малой последовательности найдется номер $N(\varepsilon)$ такой, что

$$|x_n| < \varepsilon, \quad \text{при} \quad n > N(\varepsilon).$$

Возьмем теперь $n > \max\{n_0, N(\varepsilon)\}$ и рассмотрим

$$|y_n| = \frac{1}{|x_n|} > \frac{1}{\varepsilon} = E,$$

т. е. по определению последовательность $\{y_n\}$ – бесконечно большая. $\square$

4 Монотонные последовательности

Определение 6. Последовательность $\{x_n\}$ называется *возрастающей*, если $x_n < x_{n+1}$ при любом $n \in \mathbb{N}$. Последовательность $\{x_n\}$ называется *убывающей*, если $x_n > x_{n+1}$ при любом $n \in \mathbb{N}$.

Последовательность $\{x_n\}$ называется *неубывающей*, если $x_n \leqslant x_{n+1}$ при любом $n \in \mathbb{N}$. Последовательность $\{x_n\}$ называется *невозрастающей*, если $x_n \geqslant x_{n+1}$ при любом $n \in \mathbb{N}$.

Неубывающие и невозрастющие последовательности называют *монотонными.*

Справедливы следующие утверждения о пределе монотонной последовательности.

Теорема. *Если неубывающая последовательность ограничена сверху, то она сходится. Если невозрастающая последовательность ограничена снизу, то она сходится.*

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ – неубывающая ограниченная сверху последовательность. Тогда, по теореме о существовании точных граней, она обладает супремумом: $\exists \sup\{x_n\} = M$. Покажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = M$. Из монотонности $\{x_n\}$ и свойств супремума следует, что

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon) \ : \ \forall n > N(\varepsilon) \quad \Rightarrow \quad M - \varepsilon < x_N \leqslant x_n \leqslant M < M + \varepsilon,$$

что равносильно выполнению условия

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) \quad \forall n > N(\varepsilon) \quad |x_n - M| < \varepsilon.$$

Если $\{x_n\}$ убывает и ограничена снизу, то

$$\lim_{n\to\infty} x_n = m = \inf\{x_n\}.$$

Доказывается аналогично. $\square$

Теорема. *Если последовательность монотонна и неограничена, то она является бесконечно большой. Причем если она неограничена сверху, то* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, *а если она неограничена снизу, то* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

Замечание. Утверждения двух предыдущих теорем можно сформулировать следующим образом: неубывающая последовательность сходится к своему супремуму (конечному или бесконечному), а невозрастающая последовательность сходится к своему инфимуму (конечному или бесконечному).

4.1 Определение числа e

Рассмотрим последовательность

$$y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Докажем, что она убывает. Для этого используем неравенство между среднем геометрическим и арифметическим:

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n},$$

где все величины $a_1, \ldots, a_n$ положительны, а знак равенства будет при условии $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$. Рассмотрим величину

$$\sqrt[n+1]{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n} = \sqrt[n+1]{(1 - \frac{1}{n})^n \cdot 1}.$$

Тогда

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n < \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}, \quad \left(\frac{n-1}{n}\right)^n < \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1},$$

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} < \left(\frac{n}{n-1}\right)^n$$

и окончательно

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} < \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n,$$

т. е. $y_n < y_{n-1}$ — последовательность убывает.

Она, очевидно, ограничена снизу: $y_n > 1$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Следовательно, существует

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Этот предел обозначают e.

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = e = 2,718281828459045\ldots$$

Рассмотрим последовательность

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \frac{y_n}{1 + \frac{1}{n}}.$$

Из свойств предела следует, что

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}{\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)} = e.$$

Таким образом,

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Этим соотношением и определяется число e.

4.2 Теорема Больцано–Вейерштрасса для последовательностей

Теорема Больцано–Вейерштрасса для последовательностей, с одной стороны, является частным случаем теоремы Больцано–Вейерштрасса для множеств. Но, с другой стороны, является важным результатом, который в силу своей значимости имеет смысл формулировать самостоятельно и который может быть доказан независимо через поведение монотонных последовательностей.

Пусть задана последовательность $\{x_n\}$. Последовательность $\{y_n\}: \ \ y_k = x_{n_k}$, где $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$ называется *подпоследовательностью* последовательности $\{x_n\}$. Если последовательность $\{x_n\}$ сходится, то и любая ее подпоследовательность сходится к тому же пределу.

Теорема (теорема Больцано–Вейерштрасса для последовательностей)**.** *Из любой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.*

Доказательство 1 (на основе теоремы Больцано–Вейерштрасса для множеств). Ограниченность последовательности означает ограниченность множества ее значений. Рассмотрим два случая: когда множество значений последовательности представляет собой конечный набор чисел и когда оно бесконечно.

1. Пусть множество значений последовательности $\{x_n\}$ конечно и состоит из p чисел. Обозначим их $\{a_1, a_2, \ldots, a_q\}$. Поскольку элементов последовательности бесконечное число, а значений – конечное, хотя бы одно из этих значений последовательность принимает бесконечное число раз (в противном случае мы бы получили, что последовательность состоит из конечного числа элементов). Пусть это значение a_1. Выберем первый элемент последовательности, равный a_1, и обозначим его номер n_1:

$$x_{n_1} = a_1.$$

Поскольку последовательность принимает значение a_1 бесконечное число раз, найдется другой элемент последовательности с номером $n_2 > n_1$, также принимающий значение a_1:

$$x_{n_2} = a_1, \quad n_2 > n_1.$$

Поскольку последовательность принимает значение a_1 бесконечное число раз, а мы нашли только два таких элемента, найдется третий элемент последовательности с номером $n_3 > n_2$, также принимающий значение a_1:

$$x_{n_3} = a_1, \quad n_3 > n_2.$$

И т.д. Этот процесс не прервется, потому что на каждом конечном шаге выбранными оказывается конечное число элементов последовательности, равных a_1, а не выбранными в последовательности остается бесконечное число таких элементов. Таким образом мы построим подпоследовательность

$$x_{n_k} = a_1, \quad n_k > n_{k-1},$$

которая, будучи стационарной, сходится к числу a_1.

2. Пусть множество значений последовательности $\{x_n\}$ бесконечно. Обозначим его X. Тогда, по теореме Больцано–Вейерштрасса для множеств, это множество имеет предельную точку, $a \in X'$. Выделим подпоследовательность последователности $\{x_n\}$, сходящуюся к точке a. По определению предельной точки, в любой ее окрестности существует бесконечное число элементов множества X. Возьмем последовательность окрестностей $\{O_{\alpha_k}(a)\}$ с радиусами α_k, где α_n – произвольная положительная бесконечно

малая последовательность. Рассмотрим $O_{\alpha_1}(a)$. В ней находится бесконечно много элементов последовательности $\{x_n\}$; выберем один из них, не равный a, и обозначим его номер n_1:

$$x_{n_1} \in \breve{O}_{\alpha_1}(a).$$

Рассмотрим $O_{\alpha_2}(a)$. В ней находится бесконечно много элементов последовательности $\{x_n\}$, поэтому найдется хотя бы один, не равный a, и с номером, большим, чем n_1:

$$x_{n_2} \in \breve{O}_{\alpha_2}(a), \quad n_2 > n_1.$$

И т.д. В окрестности $O_{\alpha_k}(a)$ находится бесконечно много элементов последовательности $\{x_n\}$, поэтому найдется хотя бы один, не равный a, и с номером, большим, чем n_{k-1}:

$$x_{n_k} \in \breve{O}_{\alpha_k}(a), \quad n_k > n_{k-1}.$$

Этот процесс не прервется, потому что в каждой следующей окрестности содержится бесконечное число элементов последовательности, а выбранными оказывается только конечное число.

Покажем, что построенная подпоследовательность сходится к a. Для α_k имеем:

$$\alpha_k \to 0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \, \exists K_\varepsilon \in \mathbb{N} \, : \, \forall k > K_\varepsilon \;\Rightarrow\; |\alpha_k| < \varepsilon.$$

Тогда для элемента построенной подоследовательности с номером $k > K_\varepsilon$ получаем

$$x_{n_k} \in \breve{O}_{\alpha_k}(a) \quad \Leftrightarrow \quad |x_{n_k} - a| < \alpha_k < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = a.$$

Доказательство 2 (на основе поведения монотонных последовательностей). Из ограниченности $\{x_n\}$ следует, что

$$\exists M > 0 \quad \{x_n\} \subset [-M, M] = \Delta_0.$$

Разделим отрезок Δ_0 пополам и обозначим через Δ_1 любую половину, содержащую бесконечно много элементов из $\{x_n\}$, $\quad x_{n_1} \in \Delta_1$. Разделим отрезок Δ_1 пополам и обозначим через Δ_2 любую половину, содержащую бесконечно много элементов из $\{x_n\}$. Тогда найдется элемент $x_{n_2} \in \Delta_2$ и $n_2 > n_1$. Процесс деления отрезка пополам, выбора одной из половин отрезка и элементов в ней продолжим по индукции. Получим систему вложенных отрезков $\Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \Delta_3 \supset \ldots \supset \Delta_n \supset \ldots$ и последовательность x_{n_k} такую, что

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad n_{k+1} > n_k, \quad x_{n_k} \in \Delta_k = [a_k, b_k].$$

Тогда по теореме Кантора о вложенных отрезках существует единственная точка c, принадлежащая всем отрезкам и $a_k \to c$, $b_k \to c$. Переходя к пределу по $k \to \infty$ в неравенствах $a_k \leqslant x_{n_k} \leqslant b_k$, получим $x_{n_k} \to c$. $\square$

5 Критерий Коши сходимости числовой последовательности

Определение 7. Последовательность $\{x_n\}$ называется *фундаментальной* или *последовательностью Коши*, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \, : \, \forall n > N(\varepsilon) \, \forall p \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad |x_n - x_{n+p}| < \varepsilon.$$

Теорема (критерий Коши существования предела последовательности). *Для того, чтобы последовательность имела предел необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальна.*

Доказательство см. в учебниках
Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа, 1 т.
Ильин В. А., Позняк Э. Г. Основы математического анализа, 1 ч.
Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Бл. Х. Математический анализ, 1 ч.
Зорич В. А. Математический анализ, 1 ч.