ОГЛАВЛЕНИЕ

Практическое занятие 1.1 Неопределенный интеграл. Метод подведения под знак дифференциала. Метод замены переменной

1.1.1. Определение неопределенного интеграла и его свойства

Основной задачей дифференциального исчисления является задача нахождения дифференциала или производной данной функции, т.е. задача нахождения скорости изменения значений какой-нибудь функции, при изменении аргумента. На практике часто бывает важно решить обратную задачу: зная скорость изменения значений функции (по отношению к аргументу), найти эту функцию.

Так в механике по заданной скорости определяют закон движения материальной точки, а также закон изменения скорости (со временем) по заданному ее ускорению. Эти задачи приводят к проблеме отыскания функции по ее производной $f(x)$. Неизвестная функция, обозначим ее $F(x)$, получила название первообразной по отношению к своей производной.

Определение: *Функцию $F(x)$ называют первообразной для функции $f(x)$ на числовом промежутке X, если в любой его точке x она дифференцируема и имеет производную $F'(x)$, равную $f(x)$, т.е.*

$$F'(x) = f(x).$$

Пример 1. Функция $F(x) = \sqrt{1 - x^2}$ является первообразной для функции $f(x) = -\dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$ на интервале $(-1;1)$, так как в любой его точке x выполняется равенство:

$$\left(\sqrt{1-x^2}\right)' = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Пример 2. Функция $F(x) = \sin x$ – есть первообразная для функции $f(x) = \cos x$ на интервале (–∞; ∞), ибо в каждой его точке x справедливо равенство:

$$(\sin x)' = \cos x.$$

Если $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$ на числовом промежутке X, то и функция $F(x) + C$, где C – любая постоянная, также является первообразной для $f(x)$ на X. Действительно:

$$(F(x) + C)' = F''(x) + (C)' = F'(x) = f(x).$$

Следовательно, данная функция имеет бесконечное множество первообразных.

Определение. *Отыскание первообразных называют неопределенным интегрированием, а выражение, охватывающее множество всех первообразных от данной функции f(x) – неопределенным интегралом от f(x) и обозначают:*

$$\int f(x)dx,$$

где $f(x)$ – подынтегральная функция, $f(x)dx$ – подынтегральное выражение, x – переменная интегрирования.

Согласно данного определения, неопределенный интеграл записывают так:

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \tag{1.1.1}$$

где $F(x)$ – одна из первообразных,
$F(x) + C$ – множество всех первообразных.

Неопределенный интеграл обладает следующими свойствами

Свойство 1. Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции

$$\left[\int f(x)dx\right]' = \left[F(x) + C\right]' = F'(x) = f(x).$$

Свойство 2. Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению. В самом деле:

$$d\left[\int f(x)dx\right]=d\left[F(x)+C\right]=\left[F(x)+C\right]'dx=f(x)dx\,.$$

Свойство 3. Неопределенный интеграл от дифференциала функции равен самой функции плюс постоянная.

$$\int d\left[f(x)\right]=\int f'(x)dx=f(x)+C\,.$$

Из второго и третьего свойств следует, что символы дифференциала и неопределенного интеграла уничтожают друг друга, будучи примененными последовательно (если отвлечься от постоянного слагаемого в последней формуле).

Свойство 4. Интеграл от суммы конечного числа функций равен сумме интегралов от слагаемых функций:

$$\int(u+\upsilon+...+\omega)dx=\int udx+\int\upsilon dx+\ldots+\int\omega dx,$$

где u, $\upsilon,\ldots,\omega$ – функции независимой переменной x.

Свойство 5. Постоянный множитель подынтегральной функции можно вынести за знак интеграла, т.е.:

$$\int C\cdot f(x)dx=C\int f(x)dx,$$

где C – константа.

Теорема. (Об инвариантности формул интегрирования). Всякая формула интегрирования сохраняет свой вид при подстановке вместо независимой переменной любой дифференцируемой функции от нее, т.е. если

$$\int f(x)dx=F(x)+C,\ \text{ то и }\ \int f(t)dt=F(t)+C,$$

где $t=\varphi(x)$ – любая дифференцируемая функция от x.

В силу этого правила таблица интегралов оказывается справедливой независимо от того, является ли переменная интегрирования независимой переменной или любой дифференцируемой функцией от нее.

1.1.2. Таблица интегралов

1. $\int dt=t+C;$
2. $\int t^n dt=\dfrac{t^{n+1}}{n+1}+C, n\neq -1;$

2[а]. $\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t} + C, n = -\frac{1}{2};$

2[б]. $\int \frac{dt}{t^n} = -\frac{1}{(n-1)t^{n-1}} + C, n < 0;$

3. $\int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C;$

4. $\int a^t dt = \frac{a^t}{\ln a} + C;$

5. $\int e^t dt = e^t + C;$

6. $\int \cos t dt = \sin t + C;$

7. $\int \sin t dt = -\cos t + C;$

8. $\int \frac{dt}{\cos^2 t} = tgt + C;$

9. $\int \frac{dt}{\sin^2 t} = -ctgt + C;$

10. $\int tgtdt = -\ln|\cos t| + C;$

11. $\int ctgtdt = \ln|\sin t| + C;$

12. $\int \frac{dt}{\sin t} = \ln\left|tg\frac{t}{2}\right| + C;$

13. $\int \frac{dt}{\cos t} = \ln\left|tg\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C;$

14. $\int \frac{dt}{\sqrt{a^2 - t^2}} = \arcsin\frac{t}{a} + C;$

15. $\int \frac{dt}{a^2 + t^2} = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{t}{a} + C;$

16. $\int \frac{dt}{t^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{t-a}{t+a}\right| + C;$ или $\int \frac{dt}{a^2 - t^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+t}{a-t}\right| + C$

17. $\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 \pm a^2}} = \ln\left|t + \sqrt{t^2 \pm a^2}\right| + C;$

18. $\int \sqrt{a^2 - t^2}\, dt = \frac{t\sqrt{a^2 - t^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{t}{a} + C;$

19. $\int \sqrt{t^2 \pm a^2}\, dt = \frac{t\sqrt{t^2 \pm a^2}}{2} \pm \frac{a^2}{2}\ln\left|t + \sqrt{t^2 \pm a^2}\right| + C;$

Таблица интегралов для элементарных функций выписана в предположении, что t может быть как независимой переменной, так и любой дифференцируемой функцией от x, т.е. $t = \varphi(x)$.

Легко понять, что табличные интегралы можно было бы писать и в виде

$$3.\ \int \frac{dz}{z} = \ln|z| + C;\ 5.\ \int e^{u} du = e^{u} + C;\ 6.\ \int \cos y dy = \sin y + C \text{ и т.п.}$$

Сказанное делает понятным назначение множителя dx. Он указывает на переменную интегрирования: x, t, z, u, y.

Задача отыскания первообразной по заданной производной значительно труднее, чем нахождения производной от заданной функции. В основе всех приемов лежит одна цель - свести интеграл к табличному.

1.1.3. Непосредственное интегрирование

Суть непосредственного интегрирования состоит в том, что не определенный интеграл вычисляют с применением:

1) таблицы основных интегралов;
2) свойств интегралов;
3) тождественных элементарных преобразований подынтегрального выражения.

Пример 3. Найти интеграл $\int 2x^9 dx$

Решение. Воспользуемся свойством 5 неопределенного интеграла и формулой 2 таблицей основных интегралов:

$$\int 2x^9 dx = 2\int x^9 dx = 2\frac{x^{10}}{10} + c.$$

Пример 4. Найти интеграл $\int 3^{\cos x} d(\cos x)$

Решение. Используя формулу 4 таблицы основных интегралов и теорему об инвариантности формул интегрирования, находим

$$\int 3^{\cos x} d(\cos x) = \frac{3^{\cos x}}{\ln 3} + c$$

Пример 5. Найти интеграл $\int \left(5\cos x + 2 - 3x^2\right) dx$.

Решение. Применяя свойства 4 и 5, имеем

$$\int\left(5\cos x+2-3x^2\right)dx=5\int\cos x dx+2\int dx-3\int x^2 dx.$$

Используя, соответственно формулы 6,1,2 таблицы основных интегралов, находим

$$5\int\cos x dx=5(\sin x+c_1)=5\sin x+5c_1;$$
$$2\int dx=2(x+c_2)=2x+2c_2;$$
$$3\int x^2 dx=3\left(\frac{x^{2+1}}{2+1}+c_3\right)=x^3+3c_3.$$

Таким образом,

$$\int\left(5\cos x+2-3x^2\right)dx=5\sin x+2x-x^3+(5c_1+2c_2+3c_3).$$

Обычно все произвольные постоянные суммируются, результат обозначают одной буквой: $c=5c_1+2c_2+3c_3$, поэтому окончательно получаем

$$\int\left(5\cos x+2-3x^2\right)dx=5\sin x+2x-x^3+c.$$

Пример 6. Найти интеграл $\int\frac{dx}{\sqrt{16-x^2}}$.

Решение. Интеграл табличный, поэтому можно переходить к не посредственному интегрированию по формуле 14, где $a=\sqrt{16}=4$, получаем

$$\int\frac{dx}{\sqrt{4^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{4}+c.$$

Пример 7. Найти интеграл $\int\frac{5x^2-6x+1}{\sqrt{x}}dx$.

Решение. Интеграл не табличный, поэтому преобразуем его. Разделим числитель почленно на знаменатель и применим свойства 4 и 5.

$$\int\frac{5x^2-6x+1}{\sqrt{x}}dx=5\int\frac{x^2}{\sqrt{x}}dx-6\int\frac{x}{\sqrt{x}}dx+\int\frac{dx}{\sqrt{x}}=5\int x^{\frac{3}{2}}dx-6\int x^{\frac{1}{2}}dx+$$

$$+\int x^{-\frac{1}{2}}dx=\frac{5x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}-6\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+c=5\cdot\frac{2}{5}\sqrt{x^5}-6\cdot\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+2\sqrt{x}+c=$$
$$=2\sqrt{x^5}-4\sqrt{x^3}+2\sqrt{x}+c.$$

Использован табличный интеграл $\int t^n du=\frac{t^{n+1}}{n+1}+c$, $n\neq-1$.

Пример 8. Найти интеграл $\int tg^2xdx$.

Решение. Интеграл не табличный. Воспользуемся тригонометрической формулой $1+tg^2x=\frac{1}{\cos^2 x}\Rightarrow tg^2x=\frac{1}{\cos^2 x}-1$, а затем свойством 4

$$\int tg^2xdx=\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx=\int\frac{dx}{\cos^2 x}-\int dx=tgx-x+c.$$

Применены табличные интегралы 8 и 1.

Задачи для самостоятельного решения. Найти интегралы:

1. $\int\sqrt[3]{x^2}dx$;
2. $\int\frac{du}{\sqrt[3]{u^2}}$;
3. $\int 3^t dt$;
4. $\int\frac{dx}{x}$;
5. $\int\frac{dx}{x^2}$;
6. $\int\frac{d(\cos x)}{\cos^2 x}$;
7. $\int\left(x^2+3x^3+x+1\right)dx$;
8. $\int\left(x^4+\sqrt[5]{x}+3\sqrt{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}\right)dx$;
9. $\int\left(\frac{2}{1+x^2}-\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$;
10. $\int\left(2^x+3^x\right)dx$;
11. $\int e^x\left(2-\frac{e^{-x}}{x^3}\right)dx$;
12. $\int(\sin x+5\cos x)dx$;
13. $\int\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2 dx$;
14. $\int\frac{\cos 2x}{\cos^2 x\cdot\sin^2 x}dx$;
15. $\int\frac{x^4dx}{1+x^2}$;
16. $\int\frac{3-2ctg^2x}{\cos^2 x}dx$;

17. $\int \frac{1-\sin^3 x}{\sin^2 x}dx$;

18. $\int ctg^2 x dx$;

19. $\int \sin^2 \frac{x}{2} dx$;

20. $\int \frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}dx$;

21. $\int \frac{x^2}{x^2+1}dx$;

22. $\int \left(\frac{1}{x^2-25} + \frac{1}{\sqrt{x^2+5}} \right) dx$;

23. $\int \left(\frac{1}{\sqrt{4-x^2}} + \frac{1}{x^2+3} \right) dx$;

24. $\int \frac{x^2+2}{x^2-1}dx$;

25. $\int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right) dx$;

26. $\int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}} \right) dx$;

27. $\int 4^x \left(3 + \frac{4^{-x}}{\sqrt{x}} \right) dx$;

28. $\int e^x \left(1 + \frac{e^{-x}}{\cos^2 x} \right) dx$;

29. $\int \frac{5x^8+1}{x^4}dx$;

30. $\int \frac{\left(\sqrt{x}-1\right)^3}{x}dx$;

31. $\int \frac{3tg^2 x+4}{\sin^2 x}dx$;

32. $\int \left(\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2} \right)^2 dx$;

33. $\int 2^x \cdot e^x dx$;

34. $\int \cos^2 \frac{x}{2} dx$;

35. $\int \frac{3x^4+3x^2+1}{x^2+1}dx$;

36. $\int \frac{x^5-x+1}{x^2+1}dx$;

37. $\int \frac{-2x^4+4x^2-1}{1-x^2}dx$;

38. $\int \frac{-3x^4+3x^2-1}{x^2-1}dx$;

39. $\int \frac{2^x+5^x}{10^x}dx$;

40. $\int \frac{dx}{16-x^4}$;

41. $\int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)}dx$.

1.1.4. Интегрирование подведение под знак дифференциала

Применение теоремы об инвариантности формул интегрирования к нахождению первообразной называют методом подведения под знак дифференциала.

Этот метод применяют, когда под знаком интеграла стоит произведение двух функций, причем одна из них является ***производной*** от второй или её промежуточного аргумента. В этот случаи за переменную интегрирования можно взять функцию, производная от которой стоит под знаком интеграла, преобразовав соответственно дифференциал. Подведение производной под знак дифференциала и интегрирование по функции значительно расширяет основную таблицу интегралов.

Пример 1. Найти интеграл $\int \cos 3x dx$.

Решение. Интеграл не табличный. Заменим dx на $\frac{1}{3}d(3x)$, т.е. внесем под знак дифференциала множитель 3 и разделим на него интеграл. В результате получаем

$$\int \cos 3x dx = \frac{1}{3}\int \cos 3x d(3x) = \frac{1}{3}\sin 3x + c.$$

Пример 2. Найти интеграл $\int \frac{1}{\sqrt[5]{(x+5)^3}}dx$.

Решение. Интеграл не табличный. Преобразуем подынтегральную функцию

$$\frac{1}{\sqrt[5]{(x+5)^3}} = \frac{1}{(x+5)^{\frac{3}{5}}} = (x+5)^{-\frac{3}{5}}.$$

Так как $dx=d(x+5)$ интеграл свелся к табличному от степенной функции

$$\int (x+5)^{-\frac{3}{5}}dx = \frac{(x+5)^{-\frac{3}{5}+1}}{-\frac{3}{5}+1} + c = \frac{(x+5)^{\frac{2}{5}}}{\frac{2}{5}} + c = \frac{5\sqrt[5]{(x+2)^2}}{2} + c.$$

Пример 3. Найти интеграл $\int \frac{dx}{\sin^2(2x-5)}$.

Решение. Интеграл не табличный. Заменим dx на $\frac{1}{2}d(2x–5)$. Получим

$$\frac{1}{2}\int \frac{d(2x-5)}{\sin^2(2x-5)} = -\frac{1}{2}ctg(2x-5) + c.$$

Использован табличный интеграл 9.

Пример 4. Найти интеграл $\int tg\left(\frac{x}{4}+1\right)dx$

Решение. Заменим dx на $4d(\frac{x}{4}+1)u$

Воспользуемся табличным интегралом 10.

$$4\int tg\left(\frac{x}{4}+1\right)d\left(\frac{x}{4}+1\right)=-4\ln\left|\cos\left(\frac{x}{4}+1\right)\right|+c.$$

Пример 5. Найти интеграл $\int e^{3\sin x}\cdot\cos xdx$.

Решение. Заметим, что $3\cos x$ – есть производная от $3\sin x$, т.е. $d\left(3\sin x\right)=3\cos xdx$. Поэтому целесообразно ввести новую переменную $3\sin x=u$, тогда $du=3\cos xdx$.

Итак, получим:

$$\int e^{3\sin x}\cdot\cos xdx=\frac{1}{3}\int e^{3\sin x}\cdot 3\cos xdx=$$

$$=\frac{1}{3}\int e^{u}du=\frac{1}{3}e^{u}+c=\frac{1}{3}e^{3\sin x}+c.$$

Использован табличный интеграл 5.

Пример 6. Найти интеграл $\int\frac{dx}{x\left(\ln^2 x-3\right)}$.

Решение. Заметим, что $\frac{dx}{x}$ есть дифференциал от $\ln x$, т.е. $d(\ln x)=\frac{dx}{x}$. Введем новую переменную $u=\ln x$, тогда $du=\frac{dx}{x}$. Получим

$$\int\frac{dx}{x\left(\ln^2 x-3\right)}=\int\frac{du}{u^2-3}=\int\frac{du}{u^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}=\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{u-\sqrt{3}}{u+\sqrt{3}}\right|+c==$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{3}}\left|\frac{\ln x-\sqrt{3}}{\ln x+\sqrt{3}}\right|+c.$$

Использован табличный интеграл 16.

Пример 7. Найти интеграл $\int\frac{e^{\sqrt{3x-2}}}{\sqrt{3x-2}}dx$.

Решение. Заметим, что $\frac{3dx}{2\sqrt{3x-2}}=d\left(\sqrt{3x-2}\right)$. Введем новую переменную $u=\sqrt{3x-2}$, тогда $du=\frac{3dx}{2\sqrt{3x-2}}$.

Получим

$$\int\frac{e^{\sqrt{3x-2}}}{\sqrt{3x-2}}dx=\frac{2}{3}\int e^u du=\frac{2}{3}e^u+c=\frac{2}{3}e^{\sqrt{3x-2}}+c.$$

Использован табличный интеграл 5.

Пример 8. Найти интеграл $\int\frac{e^x dx}{\sqrt{1+e^{2x}}}$.

Решение. Заметим, что $d(e^x)=e^x dx$. Обозначим $e^x=u$, $du=e^x dx$. Подставим эти выражения в интеграл и учтем, что $e^{2x}=(e^x)^2=u^2$.

$$\int\frac{e^x dx}{\sqrt{1+e^{2x}}}=\int\frac{du}{\sqrt{1+u^2}}=\ln\left|u+\sqrt{1+u^2}\right|+c=\ln\left|e^x+\sqrt{1+e^{2x}}\right|+c.$$

Использован табличный интеграл 17.

Пример 9. Найти интеграл $\int\frac{xdx}{\sqrt[3]{2+x^2}}$.

Решение.

$$\int\frac{xdx}{\sqrt[3]{2+x^2}}=\frac{1}{2}\int\left(2+x^2\right)^{-\frac{1}{3}}\cdot\underbrace{2xdx}_{d\left(2+x^2\right)}=\frac{1}{2}\int\underbrace{\left(2+x^2\right)}_{u}^{-\frac{1}{3}}\cdot\underbrace{d\left(2+x^2\right)}_{du}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(2+x^2\right)^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}+c=$$
$$\frac{3}{4}\sqrt[3]{(2+x^2)^2}+c.$$

Пример 10. Вычислить $\int x^2\cdot 4^{x^3}dx$.

Решения.

$$\int x^2\cdot 4^{x^3}dx=\int 4^{x^3}\cdot x^2 dx=\frac{1}{3}\int 4^{x^3}\cdot\underbrace{3x^2dx}_{d\left(x^3\right)}=\frac{1}{3}\int\underbrace{4^{x^3}}_{a^u}\cdot\underbrace{d\left(x^3\right)}_{du}=$$

$$=\frac{1}{3\cdot\ln 4}\cdot 4^{x^3}+c\,.$$

Использован табличный интеграл 4.

Пример 11. Вычислить $\int\frac{dx}{x\cdot\sqrt[3]{(\ln x+3)^2}}$.

Решения.

$$\int\frac{dx}{x\cdot\sqrt[3]{(\ln x+3)^2}}=\int(\ln x+3)^{-\frac{2}{3}}\cdot\frac{dx}{x}=\int(\ln x+3)^{-\frac{2}{3}}\cdot d(\ln x+3)=$$

$$=\frac{(\ln x+3)^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}}+c=3\sqrt[3]{\ln x+3}+c\,.$$

1.1.5. Замена переменной (метод подстановки)

Если подынтегральная функция такова, что трудно выделить производную от какого либо промежуточного аргумента или его просто нет, то в этом случае переменную интегрирования лучше заменить некоторой другой функцией, полагая $x = \psi(t)$; $dx = \psi'(t)dt$, (предполагается, что $\psi(t)$ и $\psi'(t)$ непрерывны). Тогда

$$\int f(x)dx=\int f\left[\psi(t)\right]\psi'(t)dt.$$

Если последний интеграл в результате такой замены свелся к табличному и равен $F(t) + C$, то исходный интеграл определяют путем возвращения к переменной x, т.е. из уравнения $x = \psi(t)$ надо найти обратную функцию $t = \varphi(x)$, и заменить t на $\varphi(x)$.

С помощью подстановок такого рода удается избавится от корня, упростить подынтегральную функцию и свести интеграл к табличному. Однако, общего рецепта для выбора функции ψ(t) нет. В каждом конкретном случае её подбирают индивидуально по виду подынтегрального выражения. Все дальнейшее изложение темы «Неопределенный интеграл» будет состоять в основном из рассмотрения различных подстановок. Приведем несколько примеров.

Пример 1. Найти $\int\frac{x+2}{\sqrt{x-1}}dx.$ В данном интеграле нужно избавится от корня. Положим $t=\sqrt{x-1}$, тогда $x = t^2+1$; $dx=2tdt$, интеграл примет вид

$$\int\frac{x+2}{\sqrt{x-1}}dx = \int\frac{t^2+3}{t}2tdt = 2\int t^2dt + 6\int dt = \frac{2}{3}t^3 + 6t + C\,.$$

Заменяя t выражением $\sqrt{x-1}$, окончательно получим

$$\int\frac{x+2}{\sqrt{x-1}}dx = \frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3} + 6\sqrt{x-1} + C.$$

Пример 2. Найти $\int\frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$.Положим $x = \frac{1}{t},\ dx = -\frac{1}{t^2}dt.$

В результате такой замены интеграл сводится к табличному.

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} = \int\frac{-\frac{1}{t^2}dt}{\frac{1}{t}\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}} = -\int\frac{\frac{1}{t^2}dt}{\frac{1}{t^2}\sqrt{t^2+1}} = -\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} = -\ln\left|t+\sqrt{t^2+1}\right| + C,$$

где $t = \frac{1}{x}$. Заменяя t выражением $\frac{1}{x}$, окончательно получим

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} = -\ln\left|\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\right| + C,$$

(можно было сделать подстановку $x = \mathrm{tg}t$).

Пример 3. Вычислить $\int\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx$. В данном интеграле также нужно избавиться от корня. Для этого оказывается удобной замена $x = \cos 2t$; $dx = -2\sin 2tdt$.

Выражение $\frac{1+x}{1-x}$ преобразуется так:

$$\frac{1+x}{1-x} = \frac{1+\cos 2t}{1-\cos 2t} = \frac{2\cos^2 t}{2\sin^2 t}.$$

Интеграл примет вид:

$$\int\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx = \int\frac{\cos t}{\sin t}(-2\sin 2tdt) = -4\int\cos^2 tdt = -2\int(1+\cos 2t)dt =$$
$$= -2\int dt - 2\int\cos 2tdt = -2t - \sin 2t + C,$$

где $t = \frac{1}{2}\arccos x$, возвращаясь к переменной x, получим:

$$\int\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx = C - \arccos x - \sin(\arccos x) = C - \arccos x - \sqrt{1-x^2}.$$

Задачи для самостоятельного решения. Вычислить

42. $\int\cos 5xdx$;
43. $\int\sin 7xdx$;
44. $\int\sin(3x+5)dx$;
45. $\int e^{2x}dx$;
46. $\int tgxdx$;
47. $\int\frac{dx}{\cos^2 3x}$;
48. $\int\frac{dx}{\sin^2\frac{x}{3}}$;
49. $\int(2+5x)^9 dx$;
50. $\int\frac{dx}{\sqrt{2-3x}}$;
51. $\int\sqrt{2x-5}dx$;
52. $\int\sqrt[3]{3-7x}dx$;
53. $\int\frac{dx}{5x+2}$;
54. $\int\frac{dx}{2-3x}$;
55. $\int e^{-x^2}\cdot xdx$;
56. $\int\frac{dx}{(3x-1)^5}$;
57. $\int\frac{xdx}{x^2-1}$;
58. $\int\frac{xdx}{\sqrt{2-x^2}}$;
59. $\int\frac{x^4}{x^5+7}dx$;
60. $\int\frac{\sin x}{1+3\cos x}dx$;
61. $\int\frac{\cos 3x}{3+\sin 3x}dx$;
62. $\int\cos^3 x\cdot\sin xdx$;
63. $\int\sin^2 x\cdot\cos xdx$;
64. $\int e^{\cos x}\cdot\sin xdx$;
65. $\int e^{-x^3}\cdot x^2dx$;
66. $\int e^{\sin x}\cdot\cos xdx$;
67. $\int\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$;
68. $\int\frac{e^{\mathrm{arctg}x}}{1+x^2}dx$;
69. $\int\frac{e^{-tgx}}{\cos^2 x}dx$;

70. $\int \frac{\cos x}{\sin^3 x} dx$;

71. $\int \frac{\sin x}{\cos^5 x} dx$;

72. $\int \frac{dx}{x(1+\ln x)}$;

73. $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x} dx$;

74. $\int x^2 \cdot \sqrt[5]{x^3 - 8} dx$;

75. $\int 3^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2} dx$

76. $\int \frac{(\mathrm{arctg} x)^{100}}{1+x^2} dx$;

77. $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{4 - e^{2x}}}$;

78. $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$;

79. $\int \frac{dx}{(\arccos x)^5 \sqrt{1-x^2}}$;

80. $\int \frac{\arcsin x + x}{\sqrt{1-x^2}} dx$;

81. $\int \frac{1 - 2\sin x}{\cos^2 x} dx$;

82. $\int \frac{1 + \sin 2x}{\sin^2 x} dx$;

83. $\int \sqrt{3 + \cos 5x} \cdot \sin 5x dx$;

84. $\int \frac{\cos 3x dx}{\sqrt[7]{3 + 5\sin 3x}}$;

85. $\int \frac{\mathrm{arctg}^2 x}{1+x^2} dx$;

86. $\int \frac{\sqrt[3]{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}} dx$;

87. $\int \frac{2^{\sqrt{x}} \cdot dx}{\sqrt{x}}$;

88. $\int \frac{\sqrt{x}}{x-1} dx$;

89. $\int \frac{x+1}{x\sqrt{x-2}} dx$;

90. $\int \frac{\sqrt{x}}{x(x+1)} dx$;

91. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$;

92 $\int \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$.;

93. $\int \frac{x dx}{1+\sqrt{x+1}}$;

94. $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x-1}}$;

95. $\int \frac{x \cdot dx}{\sqrt{2 - x^4}}$;

96. $\int \frac{x^3 \cdot dx}{\sqrt{x^8 - 3}}$;

97. $\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} dx$;

98. $\int \frac{x+1}{\sqrt{1-x^2}} dx$;

99. $\int \frac{2x-3}{x^2-4} dx$.

Практическое занятие1.2. Метод интегрирования по частям

Метод интегрирования по частям следует из дифференцирования произведения двух функций. Известно, что

$$d(u\upsilon) = u \cdot d\upsilon + \upsilon \cdot du, \text{ откуда}$$
$$u \cdot d\upsilon = d(u\upsilon) - \upsilon \cdot du.$$

Интегрируя обе части последнего равенства, получим:

$$\int u d\upsilon = \int d(u\upsilon) - \int \upsilon du \text{ или}$$
$$\int u \cdot d\upsilon = u \cdot \upsilon - \int \upsilon \cdot du \qquad (1.2.1)$$

Выражение (1.3.1) является формулой интегрирования по частям.

Данный метод состоит в том, что подынтегральное выражение $f(x)\cdot dx$ представляется каким-либо образом в виде произведения двух множителей u и $d\upsilon$. Множитель u, стоящий в левом интеграле, при переходе к правому интегралу заменяется на du, т.е. дифференцируется. Другой сомножитель $d\upsilon$ из левого интеграла заменяется на υ, т.е. интегрируется. Надо так подынтегральное выражение представить в виде произведения двух сомножителей, чтобы обе операции составили в совокупности задачу более простую, чем непосредственное вычисление интеграла $\int u \cdot d\upsilon$. На практике чаще упрощение обусловлено дифференцированием множителя u.

Если в составе подынтегрального выражения имеется множитель, упрощающийся от дифференцирования, то его следует взять за «u», а все остальное (включая dx!) за «dυ».

Пример 1. Вычислить $I = \int \frac{x\cos x}{\sin^3 x}dx.$ Ясно, что за «u» надо взять множитель x, так как при дифференцировании он «исчезает»

$$u = x,\ du = dx,\ d\upsilon = \frac{\cos x dx}{\sin^3 x} \text{ и } \upsilon = \int \frac{\cos x dx}{\sin^3 x}.$$

Чтобы найти υ сделаем замену $z = \sin x$; $dz = \cos x dx$, тогда

$$\upsilon = \int \frac{dz}{z^3} = -\frac{1}{2z^2} = -\frac{1}{2\sin^2 x}.$$

Когда применяют интегрирование по частям и по $d\upsilon$ находят υ, то произвольной постоянной не вводят, присоединяя ее к произвольной постоянной второго, незавершенного интегрирования в правой части равенства (1.3.1).

Применяя формулу(1.2.1), получим:

$$I = -\frac{x}{2\sin^2 x} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\frac{x}{2\sin^2 x} - \frac{1}{2}ctgx + C.$$

Пример 2. Вычислить $I = \int \operatorname{arctg} x \cdot dx.$ Здесь за «u» следует взять arctg$x$, тогда $d\upsilon = dx$. Составим таблицу:

$u = \operatorname{arctg} x$	$du = \dfrac{dx}{1+x^2}$
$d\upsilon = dx$	$\upsilon = x$

применяя формулу интегрирования по частям (1.3.1) получим:

$$I = x \cdot \operatorname{arctg} x - \int \frac{xdx}{1+x^2} = x \cdot \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{2xdx}{1+x^2} = x \cdot \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.$$

Пример 3. Вычислить интеграл $I = \int xe^x dx.$ За «u» принимаем x, тогда

$u = x$	$du = dx$
$d\upsilon = e^x dx$	$\upsilon = e^x$

Применяя формулу (1.3.1) получим

$$I = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C.$$

Иногда интегрирование по частям приходиться применять несколько раз.

Пример 4. Вычислить $I = \int x^2 \cos x dx.$

Разобьем подынтегральное выражение на части

$u = x^2$	$du = 2xdx$
$d\upsilon = \cos x dx$	$\upsilon = \sin x$

Тогда $I = x^2 \sin x - 2\int x \cdot \sin x dx.$

В последнем равенстве интеграл $I_1 = \int x \cdot \sin x dx$ – проще исходного (то, что cos$x$ заменился на sin$x$ не изменяет сути решения, а вместо x^2 появился более простой множитель x).

К интегралу I_1 – снова применим интегрирование по частям, полагая

$u = x$	$du = dx$

$$dv = \sin x dx \quad \Big| \quad \upsilon = -\cos x$$

Это дает $I_1 = -x\cos x + \int \cos x dx = -x\cos x + \sin x + C.$

Заменяя I_1 найденным выражением, окончательно получим

$$I = x^2 \sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C.$$

Практика показывает, что многократным интегрированием по частям можно найти интегралы следующих двух групп.

К первой группе относятся интегралы:

$$1. \int P(x)\sin x dx;\ 2. \int P(x)\cos x dx;\ 3. \int P(x)a^x dx;\ 4. \int P(x)e^x dx;$$

где $P(x)$ – многочлен некоторой степени, который и берется за функцию u. При многократном дифференцировании он «исчезает».

Ко второй группе относятся следующие интегралы:

$$1. \int P(x)\arcsin x dx;\ 2. \int P(x)\arccos x dx;\ 3. \int P(x)\mathrm{arctg} x dx;\ 4. \int P(x)\ln x dx;$$

Здесь нужно избавится от трансцендентных функций $\arcsin x$, $\arccos x$, $\mathrm{arctg} x$ и $\ln x$, поэтому ихпринимают за «u».

Пример 5. Вычислить $I = \int (2x+3)e^x dx$. Так как интеграл из первой группы, то

$$\begin{array}{c|c} u = 2x+3 & du = 2dx \\ d\upsilon = e^x dx & \upsilon = e^x \end{array}$$

Применяя формулу интегрирования по частям, получим:

$$I = (2x+3)e^x - 2\int e^x dx = (2x+3)e^x - 2e^x + C = 2xe^x + e^x + C$$

Пример 6. Найти $I = \int (x^3 + 4x^2 + 5)\ln x dx$. Интеграл второй группы, следовательно

$$\begin{array}{c|c} u = \ln x & du = \dfrac{dx}{x} \\ d\upsilon = (x^3 + 4x^2 + 5)dx & \upsilon = \dfrac{1}{4}x^4 + \dfrac{4}{3}x^3 + 5x \end{array}$$

По формуле(1.2.1) находим

$$I=\left(\frac{1}{4}x^4+\frac{4}{3}x^3+5x\right)\ln x-\int\left(\frac{1}{4}x^3+\frac{4}{3}x^2+5\right)dx=$$
$$=\left(\frac{1}{4}x^4+\frac{4}{3}x^3+5x\right)\ln x-\frac{1}{16}x^4+\frac{4}{9}x^3+5x+C.$$

Повторное интегрирование по частям иногда приводит к первоначальному интегралу, и тогда получается или ничего не дающее тождество (был сделан неправильный выбор множителей u и $d\upsilon$) или такое равенство, из которого удается найти выражение для искомого интеграла.

Пример 7. Вычислить интеграл $I=\int \cos\ln x\cdot dx$. Подынтегральное выражение содержит единственную функцию cosln$x$, поэтому

$$\left.\begin{array}{c} u=\cos\ln x \\ d\upsilon=dx \end{array}\right| \begin{array}{c} du=-\sin\ln x\cdot\dfrac{dx}{x} \\ \upsilon=x \end{array}$$

По формуле (1.3.1) получим $I=x\cos\ln x+\int\sin\ln x dx.$ Ко второму интегралу еще раз применим интегрирование по частям

$$\left.\begin{array}{c} u=\sin\ln x \\ d\upsilon=dx \end{array}\right| \begin{array}{c} du=\cos\ln x\cdot\dfrac{dx}{x} \\ \upsilon=x \end{array}$$

Тогда $I=x\cos\ln x+x\sin\ln x-\int\cos\ln x dx.$

Двойное интегрирование по частям привело к исходному интегралу т.е.

$$I=x(\cos\ln x+\sin\ln x)-I.$$

Перенесем его в левую часть последнего равенства

$$2I=x(\cos\ln x+\sin\ln x),$$

отсюда исходный интеграл будет равен

$$I=\frac{1}{2}x(\cos\ln x+\sin\ln x)+C.$$

Таким же способом вычисляют интегралы $\int\sin\ln x dx$, $\int e^{ax}\cos bx dx$, $\int e^{ax}\sin bx dx$ и некоторые другие, они получили название ***цик-***

лических. Последние два интеграла можно занести в таблицу интегралов. Для них найдены следующие формулы.

1. $\int e^{ax}\sin bx dx = \dfrac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx) + C;$

2. $\int e^{ax}\cos bx dx = \dfrac{e^{x}}{a^2+b^2}(b\sin bx + a\cos bx) + C.$

Пример 8. Найти $\int e^{-2x}\sin 3x dx.$ Здесь $a = -2$; $b = 3$, применяя первое равенство, получим

$$\int e^{-2x}\sin 3x dx = \frac{e^{-2x}}{13}(-2\sin 3x - 3\cos 3x) + C.$$

Задачи для самостоятельного решения. Вычислить

100. $\int x\cdot \operatorname{arctg} x dx$;

101. $\int \arcsin x dx$;

102. $\int \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}}dx$;

103. $\int \operatorname{arctg}\sqrt{7x-1}dx$;

104. $\int \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x^2}dx$;

105. $\int \dfrac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$;

106. $\int \ln x dx$;

107. $\int x\cdot \ln x dx$;

108. $\int x\cdot \ln(3x+2)dx$;

109. $\int \left(x^2+3x+2\right)\cdot \ln x dx$;

110. $\int \left(4x^3+6x-7\right)\cdot \ln x dx$;

111. $\int \ln\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}\right)dx$;

112. $\int x\cdot e^{-x}dx$;

113. $\int x\cdot e^{5x}dx$;

114. $\int x^3\cdot e^{-x}dx$;

115. $\int x^2\cdot e^{-\frac{x}{2}}dx$;

116. $\int x\cdot \cos x dx$;

117. $\int x\cdot \sin x dx$;

118. $\int (x+1)\cdot \cos 3x dx$;

119. $\int x^2 \sin x dx$;

120. $\int x^2\cdot \sin x dx$;

121. $\int x^2\cdot e^x dx$;

122. $\int \dfrac{x dx}{\sin^2 x}$;

123. $\int \dfrac{x dx}{\cos^2 x}$;

124. $\int e^x\cdot \sin x dx$;

125. $\int e^{2x}\cdot \cos 3x dx$;

126. $\int e^x\cdot \sin\dfrac{x}{2}dx$;

127. $\int \left(x^3+1\right)\cos x dx$;

128. $\int \ln^2 x dx$;

129. $\int \ln\left(x^2+2\right)dx$;

130. $\int \sin\left(\ln x\right)dx$;

131. $\int \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$;

Практическое занятие1.3. Многочлены и их свойства. Разложение на множители. Разложение рациональной функции на простейшие дроби

Сумму конечного числа степенных функций вида:

$$P(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0,$$

где n-целое положительное число, называют многочленом степени n;
$b_n, b_{n-1}, \ldots, b_0$, – коэффициенты многочлена, они могут быть как действительными, так и комплексными числами, причем $b_n \neq 0$,
x – независимая переменная, также может принимать действительные и комплексные значения. Степень многочлена определяет по старшей степени, входящих в него степенных функций.

Например $P(x) = x^3 + 5x + 3$ – многочлен третьей степени с действительными коэффициентами $b_3 = 1, b_2 = 0, b_1 = 5, b_0 = 3$.

$P(x) = x^2 + 1$ – многочлен второй степени с действительными коэффициентами.

Числа: 3, 1, 2+i – многочлены нулевой степени.

Многочлен тождественно равен нулю, если все его коэффициенты равны нулю.

Число 0 – является многочленом, степень которого неопределенна.

Деление многочлена на многочлен

Два многочлена с действительными коэффициентами делят друг на друга по правилам, похожим на правила деления действительных чисел. Рассмотрим эту операцию на примере.

Пример 1. Разделим многочлен $P(x) = x^7 + 2x^6 + 3x^3$ на многочлен $Q(x) = x^2 + 2x$

$$\begin{array}{l|l}
x^7 + 2x^6 + 3x^3 & x^2 + 2x \\ \cline{2-2}
\underline{x^7 + 2x^6} & x^5 + 3x - 6 \\
0 \;\; + 0 & \\
\qquad\qquad 3x^3 & \\
\qquad\qquad \underline{3x^3 + 6x^2} & \\
\qquad\qquad 0 \;\; - 6x^2 &
\end{array}$$

$$\frac{-6x^2-12x}{\quad 0+\ 12x}$$

Многочлен $x^2+2x=Q(x)$ - называют делителем,

Многочлен $x^5+3x-6=P_1(x)$ - частное,

Многочлен $12x=R(x)$ - остаток.

Задачи для самостоятельного решения. Разделить многочлен $P(x)$ на многочлен Q(x):

1. $P(x) = x^4 + 3x^2 + 4$; $\quad Q(x) = x^2 - 3x + 5$
2. $P(x) = x^8 + x^7 - 3x^4$; $\quad Q(x) = x^3 + 2x^2$
3. $P(x) = x^5 + x^4 - 8$; $\quad Q(x) = x^3 - 4x$

1.3.1. Разложение многочлена на множители

Любой многочлен степени n имеет n-корней (действительных или комплексных) и его можно представить в виде произведения n-линейных сомножителей вида:

$$P_n(x) = b_n\,(x - z_1)\,(x - z_2)\,(x - z_3)\ldots\,(x - z_n), \tag{1.3.1}$$

где $z_1, z_2, z_3 \ldots z_n$ – корни многочлена.

Если корни многочлена действительные и различные числа a_1, a_2, a_3 … a_n, то он разлагается на линейные множители с **действительными** коэффициентами

$$P_n(x) = b_n\,(x - a_1)\,(x - a_2)\,(x - a_3)\ldots\,(x - a_n). \tag{1.3.2}$$

Когда в разложении(1.3.1) есть комплексный корень $z = \alpha + \beta i$, то сопряженное ему комплексное число $z = \alpha - \beta i$ также будет корнем многочлена $P(x)$. Поэтому в разложении многочлена на линейные множители комплексные корни входят попарно сопряженными. Произведение таких двух сомножителей дает квадратный трехчлен с действительными коэффициентами:

$$(x-z)(x-\overline{z}) = \left[x-(\alpha+i\beta)\right]\left[x-(\alpha-i\beta)\right]=$$
$$=x^2-x(\alpha-i\beta)-x(\alpha+i\beta)+(\alpha+i\beta)(\alpha-i\beta)=$$
$$=x^2-2\alpha x+\alpha^2+\beta^2=x^2+px+q$$

где $p = -2\alpha$, $q = \alpha^2 + \beta^2$.

В этом случае разложение многочлена $P(x)$ будет содержать линейные множители вида $(x–a)$, соответствующие действительным корням, и квадратичные $(x^2– px+ q)$, соответствующие паре сопряженных комплексных корней:

$$P_n(x) = b_n (x - a_1) \dots (x - a_k) (x^2 + p_1x + q_1)\dots (x^2 + p_t x + q_t). \qquad (1.3.3)$$

при этом $k + 2\,t = n$.

Некоторые действительные корни могут быть равными. Если их k, то все такие сомножители можно объединить в одну скобку и записать как $(x–a)^k$.

Корень $x = a$ называют корнем кратности k.

Среди квадратных множителей $x^2 + px + q$ тоже может встретиться t одинаковых, объединяя в одну скобку, их можно записать в виде $(x^2 + px + q)^t$ – кратности t.

В результате разложение многочлена примет вид

$$P_n(x) = (x - a)^k \dots (x^2 + px + q)^t. \qquad (1.3.4)$$

Пример 2. Разложить на множители $P(x) = x^5 - 5x^3 + 4x$.

Решение. Многочлен имеет пять корней. Найдем корни уравнения:

$$x\,(x^4 - 5x^2 + 4) = 0.$$

Первый корень $x_1 = 0$. Чтобы найти остальные четыре корня, решим биквадратное уравнение:

$x^4 - 5x^2 + 4 = 0$; $x^2 = t$; $t^2 - 5t + 4 = 0$
$D = 25 - 16 = 9$; $t_1 = 4$; $t_2 = 1$.
Отсюда $x_2 = 2$, $x_3 = -2$, $x_4 = 1$, $x_5 = -1$.

Корни многочлена действительные и различные, следовательно

$$x^5 - 5x^3 + 4x = (x - 0)\,(x - 2)\,(x + 2)\,(x - 1)\,(x + 1).$$

Пример 3. Разложить на множители $P(x) = x^3 - 3x^2 + 4$.

Решение. Найдем корни уравнения $x^3 - 3x^2 + 4 = 0$.

При решении подобных уравнений есть правило: если коэффициент при старшей степени равен единице, тогда целые корни такого многочлена, обязательно являются делителями свободного члена.

Число 4 делится на ± 1; ± 2; ± 4. Подставляем эти числа в уравнение: $x_1 = -1$; $x_2 = 2$ являются корнями. Для отыскания третьего корня используем правило кратности корня: если $x = a$ является корнем кратности k многочлена $P(x)$, то $P(a) = P'(a) = P''(a) = \dots P^{(k-1)}(a) = 0$; но $P^{(k)}(a) \neq 0$.

Производная $(x^3 - 3x^2 + 4)' = 3x^2 - 6x$ обращается в нуль при $x = 2$, т.е. $x = 2$ двухкратный корень. Значит многочлен разлагается на множители

$$x^3 - 3x^2 + 4 = (x + 1)\,(x - 2)^2.$$

Пример 4. Разложить на множители $P(x) = x^4 - 16$.

Решение. Многочлен имеет четыре корня. Запишем его в виде $P(x) = (x^2 - 4)\,(x^2 + 4) = (x + 2)\,(x - 2)\,(x^2 + 4)$ первые два корня действительные $x_1 = -2$; $x_2 = 2$; третий и четвертый комплексные:

$$x^2 + 4 = 0; \quad x^2 = -4; \quad x_{3,4} = \pm\sqrt{-4} = \pm 2i$$

Отсюда разложение многочлена:

$$x^4 - 16 = (x + 2)\,(x - 2)\,(x^2 + 4).$$

Задачи для самостоятельного решения. Разложить на множители:

1. $P(x) = x^3 - x^2 + x - 1$
2. $P(x) = x^4 - 6x^2 + 8$
3. $P(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$.

1.4.2 Разложение рациональной функции на простейшие дроби

Определение. Отношение двух многочленов называют рациональной функцией или рациональной дробью:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + b_1 x + b_0}{c_n x^n + c_{n-1} x^n + \ldots c_1 x + c_0}.$$

Если $m \geq n$, то дробь неправильная.

Если $m < n$, то дробь правильная.

В случае неправильной дроби выделяют целую часть (многочлен $P(x)$ делят на многочлен $Q(x)$) в результате рациональная функция разбивается на две – целую часть (многочлен) и правильную рациональную дробь.

Правильную рациональную дробь $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ можно разложить на простейшие дроби 4-х видов в зависимости от того, какие корни имеет многочлен $Q(x)$, стоящий в знаменателе.

1. Если все корни многочлена $Q(x)$ действительные и различные, то дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ равна сумме простейших дробей такого вида:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{x-a_1}+\frac{A_2}{\left(x-a_2\right)}+...+\frac{A_n}{\left(x-a_n\right)}. \qquad (1.3.5)$$

т.е. каждому действительному корню знаменателя соответствует одна простейшая дробь.
$A_1, A_2, \ldots, A_n$ – неизвестные коэффициенты, которые нужно найти.

Хотелось бы обратить особое внимание на форму записи простейших дробей: эти дроби должны быть правильными, т.е. степень многочлена числителя должна быть на единицу меньше степени многочлена знаменателя. Поскольку у простейших дробей знаменатели являются многочленами 1-й степени, то в числителе стоят числа A_1, A_2 … A_n (многочлены нулевой степени).

2. Если многочлен знаменателя $Q(x)$ имеет кратные действительные корни, то рациональную дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ разлагают на простейшие дроби вида:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(x)}{c_n(x-a_1)(x-a_2)^k}=\frac{A_1}{x-a_1}+\frac{B_1}{\left(x-a_2\right)^1}+\frac{B_2}{\left(x-a_2\right)^2}...+\frac{B_k}{\left(x-a_2\right)^k}. \qquad (1.3.6)$$

Во втором случае, как и в первом, число простейших дробей равно числу корней знаменателя, не смотря на то, что корень $x = a_2$ повторяется k-раз. В числителе всех простейших дробей также стоят многочлены 0-ой степени с неизвестными коэффициентами A_1, B_1, … B_k.

Пример 5. Представить в виде суммы простейших дробей рациональную дробь:

$$\frac{x^3+1}{(x-1)(x+3)(x+2)^2}.$$

Знаменатель имеет 4 корня: из них корень $x = –2$ повторяется дважды. Поэтому дробь разлагается на четыре простейшие с неизвестными коэффициентами вида:

$$\frac{x^3+1}{(x-1)(x+3)(x+2)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+3}+\frac{C}{x+2}+\frac{D}{(x+2)^2}.$$

3. Если многочлен знаменателя $Q(x)$ имеет комплексные корни, т.е. разлагается на квадратичные сомножители, то дробь $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ представляют сумной простейших дробей:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1 x + B_1}{(x^2 + p_1 x + q_1)} + \frac{A_1 x + B_1}{(x^2 + p_2 x + q_2)} + \ldots + \frac{A_{\frac{n}{2}} x + B_{\frac{n}{2}}}{(x^2 + p_{\frac{n}{2}} x + q_{\frac{n}{2}})}. \qquad (1.3.7)$$

В третьем случае каждой паре сопряженных комплексных корней знаменателя соответствует одна простая дробь, поэтому число простейших дробей в два раза меньше, чем корней. Далее, у простейших дробей в знаменателе стоят многочлены 2-ой степени, следовательно, в числителе должны быть многочлены 1-ой степени с неизвестными коэффициентами A_1, A_2 … $A_{n/2}$; B_1, B_2 … $B_{n/2}$.

4. И наконец, если корни знаменателя комплексные и среди них есть кратные, то правильную рациональную дробь разлагают на простейшие вида:

$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{Q(x)} &= \frac{P(x)}{(x^2 + p_1 x + q_1)(x^2 + p_2 x + q_2)^k} = \\ &= \frac{A_1 x + B_1}{(x^2 + p_1 x + q_1)} + \frac{A_2 x + B_2}{(x^2 + p_2 x + q_2)} + \ldots + \frac{A_k x + B_k}{(x^2 + p_2 x + q_2)^k} \end{aligned}. \qquad (1.3.8)$$

Пример 6. Представить в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{x-1}{(x^2+1)^2(x+2)} = \frac{A_1 x + B_1}{x^2+1} + \frac{A_2 x + B_2}{(x^2+1)^2} + \frac{D}{x+2}.$$

Задачи для самостоятельного решения. Представить в виде суммы простейших дробей:

1. $\dfrac{3x+1}{x^3+5x^2+6x}$;
2. $\dfrac{x^2+x+1}{x^3-4x}$;
3. $\dfrac{2x+3}{x^4+3x^3+3x^2+x}$;

4. $\dfrac{x^2+x+2}{x^3+4x}$;

5. $\dfrac{x^2-2}{x^4+x^2}$;

6. $\dfrac{x2}{x^3+1}$.

Нахождение неизвестных коэффициентов

При разложении рациональной дроби на простейшие нужно найти неизвестные коэффициенты. Для этого простейшие дроби, стоящие в правой части равенств (1.4.5), (1.4.6), (1.4.7), (1.4.8), приводят к общему знаменателю. Тождественность этих равенств будет в том случае, если у них многочлены, стоящие в числителях слева и справа, будут равны. Поэтому у этих многочленов приравнивают числовые коэффициенты при одинаковых степенях x. Из полученной системы уравнений находят неизвестные коэффициенты.

Пример 7. Разложить на простейшие дроби:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{x^3+1}{x(x-1)^3}$$

Знаменатель дроби имеет 4 корня: $x_1 = 0$, $x_{2,3,4} = 1$, следовательно, данную дробь можно представить как сумму 4-х простейших дробей:

$$\frac{x^3+1}{x(x-1)^3}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}+\frac{D}{(x-1)^3}.$$

Приведем простейшие дроби в правой части равенства к общему знаменателю:

$$\frac{x^3+1}{x(x-1)^3}=\frac{(x-1)^3 \big/ A}{x}+\frac{x(x-1)^2 \big/ B}{x-1}+\frac{x(x-1) \big/ C}{(x-1)^2}+\frac{x \big/ D}{(x-1)^3}$$

или

$$\frac{x^3+1}{x(x-1)^3}=\frac{A(x^3-3x^2+3x-1)+B(x^3-2x^2+x)+C(x^2-x)+Dx}{x(x-1)^3}.$$

Приравниваем числовые коэффициенты при одинаковых степенях x и у многочленов, стоящих в числителе слева и сплава.

$$\begin{array}{l|l} x^3 & 1 = A + B \\ x^2 & 0 = -3A - 2B + C \\ x^1 & 0 = 3A + B - C + D \\ x^0 & 1 = -A \end{array}$$

Из полученной системы уравнений находим неизвестные коэффициенты:

$$A = -1,\ B = 2,\ C = 1,\ D = 2.$$

Дробь разлагается на простейшие:

$$\frac{x^3+1}{x(x-1)^3} = \frac{-1}{x} + \frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2}{(x-1)^3}.$$

Пример 8. Разложить на простейшие дроби

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{3x+2}{x^3+5x^2+6x}$$

Найдем корни многочлена, стоящего в знаменателе:

$$x\,(x^2 + 5x + 6) = 0; \qquad x_1 = 0; \qquad x_2 = -2;\ x_3 = -3.$$

Данная дробь равна сумме трех простейших дробей:

$$\frac{3x+2}{x(x+2)(x+3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+3}.$$

Приведем эти дроби к общему знаменателю

$$\frac{3x+2}{x(x+2)(x+3)} = \frac{A(x+2)(x+3) + Bx(x+3) + Cx(x+2)}{x(x+2)(x+3)}.$$

Освобождаясь от знаменателя, получим

$$3x + 2 = A(x + 2)(x + 3) + Bx(x + 3) + Cx(x + 2).$$

В данном случае все три корня действительные и различные. Поэтому коэффициенты *A, B, C* можно найти другим способом. Подставим по очереди в последнее равенство значения всех трех корней:

$$x = 0; \qquad 2 = 6A; \qquad A = \frac{1}{3}$$

$$x = -2; \qquad -4 = -2B; \qquad B = 2$$

$$x = -3; \qquad -7 = 3C; \qquad C = -\frac{7}{3}$$

Дробь разлагается на простейшие:

$$\frac{3x+2}{x^3+5x^2+6x} = \frac{1}{3x} + \frac{2}{x+2} - \frac{7}{3(x+3)}.$$

Задачи для самостоятельного решения. Разложить на простейшие дроби:

1. $\dfrac{x}{x^3+5x^2+8x+4}$;
2. $\dfrac{x}{(x-1)^3}$;
3. $\dfrac{x^2+3x+3}{x\left(x^2+1\right)}$;
4. $\dfrac{3x^2+x+3}{(x-1)^3\left(x^2+1\right)}$;
5. $\dfrac{4x^2+16x-8}{x^3-4x}$;
6. $\dfrac{x^2+x-1}{x(x^2+1)^2}$.

Практическое занятие 1.4. Интегрирование простейших дробей и рациональных функций

1.4.1. Интегрирование простейших дробей

Как уже отмечалось, рациональная функция – это отношение двух многочленов. Если она является неправильной дробью, то ее всегда можно представить в виде целой части (многочлена) плюс правильная рациональная дробь. В свою очередь правильную рациональную дробь, в зависимости от того, какие корни имеет многочлен знаменателя, разлагают на простейшие дроби 4-х видов:

$$\frac{A}{x \pm a};\frac{A}{(x \pm a)^k};\frac{Ax+B}{x^2+px+q};\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}.$$

Интегралы от простейших дробей всех 4-х видов выражаются через элементарные функции:

$$\int \frac{A}{x \pm a}dx = A\ln|x \pm a| + c.$$

$$\int \frac{A}{(x \pm a)^k}dx = A\frac{(x \pm a)^{1-k}}{1-k} + c.$$

Интеграл вида $\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx$ находят путем выделения полного квадрата в знаменателе, в результате он сводится к табличному.

Пример 1. Найти интеграл $\int \frac{dx}{2x^2-2x+3}$.

Решение. Вынесем в знаменателе 2 за скобку и выделим полный квадрат:

$$2\left(x^2 - x + \frac{3}{2}\right) = 2\left[\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{4}\right)\right];$$

$$\int \frac{dx}{2x^2-2x+3} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}-\frac{1}{4}\right)} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{4}} =$$

$$\left|x - \frac{1}{2} = t\right| = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2 + \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}} + c = \frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{5}} + c.$$

Пример 2. Найти интеграл $\int \frac{3x-2}{x^2+6x-9}dx$

Решение. Выделяем в знаменателе полный квадрат:

$$x^2+6x-9=\left(x+\frac{6}{2}\right)^2-\left(\frac{6}{2}\right)^2-9=\left(x+3\right)^2-18\,.$$

и вводим новую переменную $t = x + 3$.

$$\int\frac{3x-2}{x^2+6x-9}dx=\int\frac{3x-2}{(x+3)^2-18}dx\left|\begin{matrix}x+3=t\\ x=t-3\\ dx=dt\end{matrix}\right|=\int\frac{3(t-3)-2}{t^2-18}dt=$$

$$=\int\frac{3t-9-2}{t^2-18}dt=\int\frac{3t-11}{t^2-18}dt=\int\frac{3t}{t^2-18}dt-\int\frac{11}{t^2-18}dt=$$

$$=3\int\frac{t}{t^2-18}dt-11\int\frac{dt}{t^2-\left(\sqrt{18}\right)^2}=3\cdot\frac{1}{2}\int\frac{d(t^2-18)}{t^2-18}-$$

$$-11\int\frac{dt}{t^2-\left(\sqrt{18}\right)^2}=\frac{3}{2}\ln\left|t^2-18\right|-11\cdot\frac{1}{2\sqrt{18}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{18}}{t+\sqrt{18}}\right|+c=$$

$$=\left|t=x+3\right|=\frac{3}{2}\ln\left|\left(x+3\right)^2-18\right|-11\cdot\frac{\sqrt{18}}{2\cdot 18}\ln\left|\frac{x+3-\sqrt{18}}{x+3+\sqrt{18}}\right|+c.$$

Метод нахождения интеграла $\int\frac{Ax+B}{\left(x^2+px+q\right)^k}dx$ основан на приемах, ведущих к понижению степени квадратного трехчлена, стоящего в знаменателе. В общем случае вычисления очень громоздки, поэтому рассмотрим конкретный пример.

Пример 3. Вычислить интеграл:

$$\int\frac{(x-1)dx}{(x^2+2x+3)^2}$$

Выделим в числителе производную от знаменателя, тогда интеграл разобьется на два:

$$\int\frac{(x-1)dx}{(x^2+2x+3)^2}=\int\frac{\frac{2x+2}{2}-2}{(x^2+2x+3)^2}dx=\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+2x+3)}{(x^2+2x+3)^2}-2\int\frac{dx}{(x^2+2x+3)^2}\,.$$

Первый $J_1 = \frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+2x+3)}{(x^2+2x+3)^2} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+2x+3}$ – является интегралом от степенной функции.

Второй $J_2 = \int\frac{dx}{(x^2+2x+3)^2}$ вычислим отдельно.

Понизим степень знаменателя у 2-го интеграла следующим образом:

$$J_2 = \int\frac{dx}{(x^2+2x+3)^2} = \int\frac{d(x+1)}{\left[(x+1)^2+2\right]^2}dx = \int\frac{dt}{(t^2+2)^2}.$$

В числителе последнего интеграла прибавим и отнимем t^2:

$$J_2 = \frac{1}{2}\int\frac{t^2+2-t^2}{(t^2+2)^2}dt = \frac{1}{2}\int\frac{t^2+2}{(t^2+2)^2}dt - \frac{1}{2}\int\frac{t^2}{(t^2+2)^2}dt.$$

В результате интеграл J_2 – снова разбился на два, один из которых является табличным, другой можно взять по частям:

$$J_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int t\frac{2t}{(t^2+2)^2}dt = \left|\begin{matrix} u = t;\ d\upsilon = \dfrac{2t}{(t^2+2)^2}dt \\ du = dt;\ \upsilon = -\dfrac{1}{t^2+2} \end{matrix}\right| =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}} - \frac{1}{4}\left[-\frac{t}{t^2+2} + \int\frac{dt}{t^2+2}\right].$$

$$J_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}} + \frac{1}{4}\cdot\frac{t}{t^2+2} - \frac{1}{4\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}}.$$

Итак: $J_2 = \int\frac{dx}{(x^2+2x+3)^2} = \frac{1}{4\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}} + \frac{x+1}{4(x^2+2x+3)}.$

Подставим найденное значение J_2 в исходное выражение, окончательно получим:

$$\int\frac{(x-1)dx}{(x^2+2x+3)^2} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(x^2+2x+3)} - 2\cdot\frac{1}{4\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}} - 2\cdot\frac{x+1}{4(x^2+2x+3)}.$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{x+2}{(x^2+2x+3)} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}} + c.$$

1.4.2. Интегрирование рациональных функций

Чтобы найти интеграл от рациональной дроби $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ нужно:

1. выделить целую часть, если рациональная функция является неправильной дробью;

2. у полученной правильной дроби найти корни многочлена, стоящего в знаменателе и по виду найденных корней записать правильную дробь в виде суммы простейших дробей с неизвестными коэффициентами;

3. найти неопределенные коэффициенты у простейших дробей;

4. проинтегрировать целую часть и простейшие дроби.

Пример 4. Вычислить интеграл

$$\int \frac{(x^4-6x^3+12x^2+6)dx}{x^3-6x^2+12x-8}.$$

У рациональной функции, стоящей под знаком интеграла, степень многочлена числителя больше степени многочлена знаменателя.

Дробь неправильная, поэтому выделим целую часть:

$$\begin{array}{r|l} x^4-6x^3+12x^2+6 & x^3-6x^2+12x-8 \\ \cline{2-2} x^4-6x^3+12x^2-8x & \qquad x \\ +8x+6 & \end{array}$$

Тогда исходный интеграл можно записать в виде:

$$\int \frac{(x^4-6x^3+12x^2+6)dx}{x^3-6x^2+12x-8} = \int x dx + \int \frac{(8x+6)dx}{x^3-6x^2+12x-8} = \frac{x^2}{2} + \int \frac{(8x+6)dx}{(x-2)^3}.$$

Знаменатель полученной правильной дроби, стоящий под знаком второго интеграла, имеет действительные кратные корни. Дробь разлагается на простейшие вида:

$$\frac{(8x+6)}{(x-2)^3} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{C}{(x-2)^3}.$$

Чтобы найти коэффициенты A, B, C приведем простейшие дроби к общему знаменателю

$$\frac{(8x+6)}{(x-2)^3} = \frac{A(x^2-4x+4)+B(x-2)+C}{(x-2)^3}.$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x у многочленов, стоящих в числителе слева и справа, получим:

$$\begin{array}{lll} x^2 & 0 = A & A = 0 \\ x^1 & 8 = -4A + B & B = 8 \\ x^0 & 6 = 4A - 2B + C & C = 22 \end{array}$$

проинтегрируем простейшие дроби.

$$\int \frac{(8x+6)dx}{(x-2)^3} = 8\int \frac{dx}{(x-2)^2} + 22\int \frac{dx}{(x-2)^3} = -\frac{8}{(x-2)} - \frac{22}{2(x-2)^2}.$$

Подставляя в исходный интеграл, окончательно получим:

$$\int \frac{(x^4 - 6x^3 + 12x^2 + 6)dx}{x^3 - 6x^2 + 12x - 8} = \frac{x^2}{2} - \frac{8}{x-2} - \frac{11}{(x-2)^2} + c.$$

Пример 5. Найти $\int \frac{9x^2 - 2x - 8}{x^3 - 4x} dx$**.**

Решение. Дробь правильная, разложим знаменатель на множители так:

$$x^3 - 4x = 0;\ x(x^2 - 4) = 0;\ x(x-2)(x+2) = 0;$$
$$x^3 - 4x = x(x-2)(x+2).$$

Получили три множителя первой степени, соответствующие корням: 0, 2 и –2, каждый корень кратности 1.

Дробь разлагается на простейшие:

$$\frac{9x^2 - 2x - 8}{x(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+2}$$

Умножим обе части разложения на общий знаменатель $x(x-2)(x+2)$.

$$\left(\frac{9x^2 - 2x - 8}{x(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+2}\right) \cdot x(x-2)(x+2)$$

В результате получим

$$9x^2 - 2x - 8 = A(x-2)(x+2) + Bx(x+2) + Cx(x-2) \qquad 1.4.1.$$

Общий знаменатель имеет три действительных корня. Подставляя каждый из них в левую и правую части равенства 1.5.1, найдем значения неизвестных коэффициентов *A, B* и *C*.

$x = 0,\quad 9\cdot 0^2 - 2\cdot 0 - 8 = A(0-2)(0+2) + B\cdot 0\cdot(0+2) + C\cdot 0\cdot(0-2);$

$-8 = -4A \Rightarrow A = 2$

$x = 2\quad 9\cdot 2^2 - 2\cdot 2 - 8 = A\cdot(2-2)\cdot(2+2) + B\cdot 2\cdot(2+2) + C\cdot 2\cdot(2-2),$

$9\cdot 4 - 4 - 8 = 0\cdot A + 8\cdot B + 0\cdot C;$

$24 = 8B \Rightarrow B = 3$

$x = -2\quad 9\cdot(-2)^2 - 2\cdot(-2) - 8 =$

$= A\cdot(-2-2)\cdot(-2+2) + B\cdot(-2)\cdot(-2+2) + C\cdot(-2)\cdot(-2-2);$

$9\cdot 4 + 4 - 8 = A\cdot 0 + B\cdot 0 + C\cdot 8;$

$32 = 8C \Rightarrow C = 4$

Итак: $A = 2$, $B = 3$, $C = 4$.

Эти же коэффициенты можно было получить другим способом.

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x слева и справа, в равенстве (1.5.1) получим систему уравнений:

$$
\begin{array}{ll}
x^2 & 9 = A + B + C \\
x^1 & -2 = B\cdot 2 + C\cdot(-2) \\
x^0 & -8 = A\cdot(-4)
\end{array}
$$

Решая эту систему, находим те же значение коэффициентов $A = 2$; $B = 3$; $C = 4$.

При решении обычно комбинируют оба метода.

Заменяя под знаком интеграла дробь ее разложением на простейшие дроби и находя интегралы, последовательно получаем

$$
\int\frac{9x^2-2x-8}{x^3-4x}dx = \int\left(\frac{2}{x}+\frac{3}{x-2}+\frac{4}{x+2}\right)dx = \int\frac{2dx}{x} + \int\frac{3dx}{x-2} + \int\frac{4dx}{x+2} =
$$

$$
= 2\int\frac{dx}{x} + 3\int\frac{dx}{x-2} + 4\int\frac{dx}{x+2} = 2\int\frac{dx}{x} + 3\int\frac{d(x-2)}{x-2} + 4\int\frac{d(x+2)}{x+2} =
$$

$$
= 2\cdot\ln|x| + 3\cdot\ln|x-2| + 4\cdot\ln|x+2| + c.
$$

Пример 6. Найти $\int\frac{3x^2+5x+12}{(x^2+3)(x^2+1)}dx$.

Решение. Знаменатель не имеет действительных корней, то есть разложен на множители второй степени.

Разложение подынтегральной дроби на простейшие имеет вид:

$$\frac{3x^2+5x+12}{(x^2+3)(x^2+1)}=\frac{Ax+B}{x^2+3}+\frac{Cx+D}{x^2+1}.$$

Умножив обе части полученного равенства на общий знаменатель $\left(x^2+3\right)\left(x^2+1\right)$, получаем:

$$3x^2+5x+12=(Ax+B)(x^2+1)+(Cx+D)(x^2+3).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, будем иметь:

$$\begin{array}{ll} x^3 & 0=A+C \\ x^2 & 3=B+D \\ x^1 & 5=A+3C \\ x^0 & 12=B+3D \end{array}$$

Решая систему, получаем: $A=-\frac{5}{2};B=-\frac{3}{2};C=\frac{5}{2};D=\frac{9}{2}.$

Интегрируя, находим:

$$\int\frac{3x^2+5x+12}{(x^2+3)(x^2+1)}dx=\int\frac{\frac{-5}{2}x-\frac{3}{2}}{x^2+3}dx+\int\frac{\frac{5}{2}x+\frac{9}{2}}{x^2+1}dx=$$

$$=\frac{-1}{2}\int\frac{5x+3}{x^2+3}dx+\frac{1}{2}\int\frac{5x+9}{x^2+1}dx=$$

$$=-\frac{1}{2}\left(\int\frac{5x}{x^2+3}dx+\int\frac{3}{x^2+3}dx\right)+\frac{1}{2}\left(\int\frac{5x}{x^2+1}dx+\int\frac{9}{x^2+1}dx\right)=$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot5\int\frac{xdx}{x^2+3}-\frac{1}{2}\cdot3\int\frac{dx}{x^2+3}+\frac{1}{2}\cdot5\int\frac{xdx}{x^2+1}+\frac{1}{2}\cdot9\int\frac{dx}{x^2+1}=$$

$$=-\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+3)}{x^2+3}-\frac{3}{2}\int\frac{dx}{x^2+(\sqrt{3})^2}+\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+1)}{x^2+1}+\frac{9}{2}\int\frac{dx}{x^2+1^2}=$$

$$=-\frac{5}{4}\ln\left(x^2+3\right)-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}+\frac{5}{4}\ln\left(x^2+1\right)+\frac{9}{2}\operatorname{arctg}x+c.$$

Пример 7. Найти $\int\frac{x^3-2x}{(x^2+1)^2}dx$.

Решение. Так как x^2+1 есть двукратный множитель, то

$$\frac{x^3-2x}{(x^2+1)^2}=\frac{Ax+B}{\left(x^2+1\right)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+1}.$$

Освобождаясь от знаменателей, получим

$$x^3-2x=Ax+B+(Cx+D)(x^2+1).$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x:

x^3	$1=C$
x^2	$0=D$
x^1	$-2=A+C$
x^0	$0=B+D$

Решая систему получаем: $A=-3$, $B=0$, $C=1$, $D=0$.
Следовательно,

$$\int\frac{x^3-2x}{(x^2+1)^2}dx=\int\frac{-3xdx}{(x^2+1)^2}+\int\frac{x}{x^2+1}dx=-\frac{3}{2}\int\frac{d(x^2+1)}{(x^2+1)^2}+$$
$$+\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+1)}{x^2+1}=\frac{3}{2(x^2+1)}+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+c.$$

Заметим, что данный интеграл можно было найти проще с помощью подстановки $x^2+1=t$.

Пример 8. Найти интеграл $\int\frac{x+4}{x^3+6x^2+11x+6}dx$.

Решение. Так как подынтегральная функция является правильной дробью, то ее следует сразу представить в виде суммы простейших дробей. Легко видеть, что многочлен $x^3+6x^2+11x+6$ обращается в нуль при $x=-1$, поэтому он делится без остатка на $x+1$.

Выполним деление:

$$\begin{array}{l|l}
x^3+6x^2+11x+6 & x+1 \\ \cline{2-2}
\underline{x^3+x^2} & x^2+5x+6 \\
\quad 5x^2+11x & \\
\quad \underline{5x^2+5x} & \\
\qquad 6x+6 & \\
\qquad \underline{6x+6} &
\end{array}$$

0

Следовательно,

$$x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = (x + 1)(x^2 + 5x + 6) = (x + 1)(x + 2)(x + 3);$$
$$\frac{x+4}{x^3+6x^2+11x+6} = \frac{x+4}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+3}.$$

Освобождаясь от знаменателей, получим

$$x + 4 = A(x + 2)(x + 3) + B(x + 1)(x + 3) + C(x + 1)(x + 2).$$

Полагая $x = -1$, найдем $3 = 2A$, т.е. $A = 3/2$. Если $x = -2$, то получим $2 = -B$, т.е. $B = -2$. При $x = -3$ получим $1 = 2C$, т.е. $C = 1/2$.

Итак,

$$\int \frac{x+4}{x^3+6x^2+11x+6}dx = \frac{3}{2}\int\frac{dx}{x+1} - 2\int\frac{dx}{x+2} + \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x+3} =$$
$$= \frac{3}{2}\ln|x+1| - 2\ln|x+2| + \frac{1}{2}\ln|x+3| + c.$$

Пример 9. Найти интеграл $\int \frac{x^3+3x^2+5x+7}{x^2+2}dx$.

Решение. Выделим целую часть данной неправильной рациональной дроби:

$$\begin{array}{l|l} x^3 + 3x^2 + 5x + 7 & x^2 + 2 \\ \cline{2-2} \underline{x^3 + 2x} & x + 3 \\ \quad 3x^2 + 3x + 7 & \\ \quad \underline{3x^2 + 6} & \\ \qquad 3x + 1 & \end{array}$$

Итак,

$$\frac{x^3+3x^2+5x+7}{x^2+2} = x + 3 + \frac{3x+1}{x^2+2}.$$

Отсюда находим

$$\int\frac{x^3+3x^2+5x+7}{x^2+2}dx = \int\left(x+3+\frac{3x+1}{x^2+2}\right)dx = \int x dx + 3\int dx +$$
$$+ \int\frac{3x+1}{x^2+2}dx = \frac{1}{2}x^2 + 3x + \frac{3}{2}\int\frac{2xdx}{x^2+2} + \int\frac{dx}{x^2+2} =$$

$$=\frac{1}{2}x^2+3x+\frac{3}{2}\ln(x^2+2)+\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}+c\,.$$

Пример 10. Найти интеграл $\int\frac{x^2dx}{(x-1)^5}$.

Решение. Подынтегральная функция является правильной рациональной дробью и можно было бы найти интеграл, представив эту дробь в виде суммы простейших дробей. Однако нахождение интеграла можно значительно упростить, если произвести замену переменной $x-1=t$; тогда $x=t+1$ и $dx=dt$. В результате получаем

$$\int\frac{x^2dx}{(x-1)^5}=\int\frac{(t+1)^2\,dt}{t^5}=\int\frac{t^2+2t+1}{t^5}dt=\int\frac{dt}{t^3}+2\int\frac{dt}{t^4}+\int\frac{dt}{t^5}=$$

$$=-\frac{1}{2t^2}-\frac{2}{3t^3}-\frac{1}{4t^4}+c=-\frac{1}{2(x-1)^2}-\frac{2}{3(x-1)^3}-\frac{1}{4(x-1)^4}+c=$$

$$=-\frac{6x^2-4x+1}{12(x-1)^4}+c\,.$$

Иногда перед интегрированием рациональной дроби следует произвести замену переменной.

Задачи для самостоятельного решения. Найти интегралы:

134. $\int\frac{dx}{x^2+4x+5}$;

135. $\int\frac{dx}{3x^2-2x-1}$;

136. $\int\frac{3x+1}{x^2-2x+5}dx$;

137. $\int\frac{5x-1}{x^2+3x+3}dx$;

138. $\int\frac{x-4}{(x-2)(x-3)}dx$;

139. $\int\frac{(2x+3)dx}{(x-2)(x+5)}$;

140. $\int\frac{3x^2+2x-3}{x(x-1)(x+1)}dx$;

141. $\int\frac{(2x+3)dx}{(x-2)^2}$;

142. $\int\frac{dx}{(x+1)(x-2)}$;

143. $\int\frac{dx}{(x-1)^2(x+1)}$;

144. $\int\frac{(x^2+2)}{(x+1)^2(x-1)}dx$;

145. $\int\frac{xdx}{x^2+3x+2}$;

146. $\int\frac{x^4+3x^3+2x^2+x+1}{x^2+x+1}dx$;

147. $\int\frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}dx$;

148. $\int\frac{dx}{x^4+x^2}$;

149. $\int\frac{dx}{(x^2+2)(x-1)^2}$;

150. $\int \frac{dx}{1-x^3}$;

151. $\int \frac{dx}{1+x^3}$;

152. $\int \frac{x^4-2x^3+3x+4}{1+x^3}dx$;

153. $\int \frac{dx}{\left(1+x^3\right)^2}$;

154. $\int \frac{dx}{x^4-1}$;

155. $\int \frac{5x+2}{x^2+2x+10}dx$;

156. $\int \frac{x^2+2x+7}{(x-2)(x^2+1)^2}dx$;

157. $\int \frac{7x-6}{2x^2-6x+4}dx$;

158. $\int \frac{x^4dx}{(x^2-1)(x+2)}$;

159. $\int \frac{x^2}{(x+2)^2(x+1)}dx$;

160. $\int \frac{3x+5}{(x^2+2x+2)^2}dx$;

161. $\int \frac{3x+1}{x(1+x^2)^2}dx$;

Практическое занятие**1.5.** Интегрирование тригонометрических функций

1.5.1. Интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$, где *R* – рациональная функция

Интегралы указанного вида приводят к интегралам от рациональных функций с помощью так называемой *универсальной тригонометрической подстановки* $tg\frac{x}{2}=t$. В результате этой подстановки имеем:

$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2};\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2};\ x=\text{arctg}\ t;\ dx=\frac{2dt}{1+t^2}.$$

Пример 1. Найти $\int \frac{dx}{8-4\sin x+7\cos x}$.

Решение. Воспользуемся универсальной тригонометрической подстановкой:

$$\int \frac{dx}{8-4\sin x+7\cos x}=\left|\begin{matrix} t=tg\frac{x}{2} & dx=\frac{2dt}{1+t^2} \\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2} & \sin x=\frac{2t}{1+t^2}\end{matrix}\right|=$$

$$=\int\frac{1}{8-4\cdot\dfrac{2t}{1+t^2}+7\cdot\dfrac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2dt}{1+t^2}=\int\frac{2dt}{8(1+t^2)-8t+7(1-t^2)}=$$

$$=2\int\frac{dt}{8+8t^2-8t+7-7t^2}=2\int\frac{dt}{t^2-8t+15}=2\int\frac{dt}{(t-4)^2+15-16}$$

$$=2\int\frac{d(t-4)}{(t-4)^2-1}=\frac{2}{2\cdot 1}\ln\left|\frac{t-4-1}{t-4+1}\right|+c=\ln\left|\frac{t-5}{t-3}\right|+c=\ln\left|\frac{tg\dfrac{x}{2}-5}{tg\dfrac{x}{2}-3}\right|+c.$$

Пример 2. Найти $\int\frac{dx}{3\cos x+2}$.

Решение. Воспользуемся универсальной тригонометрической подстановкой:

$$\int\frac{dx}{3\cos x+2}=\int\frac{1}{3\cdot\dfrac{1-t^2}{1+t^2}+2}\cdot\frac{2dt}{1+t^2}=\int\frac{2dt}{3(1-t^2)+2(1+t^2)}=$$

$$=2\int\frac{dt}{3-3t^2+2+2t^2}=2\int\frac{dt}{-t^2+5}=-2\int\frac{dt}{t^2-5}=-2\int\frac{dt}{t^2-\left(\sqrt{5}\right)^2}=$$

$$=-2\frac{1}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{5}}{t+\sqrt{5}}\right|+c=-\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{tg\dfrac{x}{2}-\sqrt{5}}{tg\dfrac{x}{2}+\sqrt{5}}\right|+c.$$

Универсальная подстановка $tg\frac{x}{2}=t$ во многих случаях приводит к сложным вычислениям, т.к. при ее применении sin x и cos x выражаются через t в виде рациональных дробей, содержащих t^2.

В некоторых частных случаях нахождение интегралов вида $\int R(\sin x,\cos x)\,dx$ может быть упрощено.

1. Если $R(\sin x, \cos x)$ – **нечетная функция относительно sin *x***, т.е.

$$R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x),$$

то подынтегральная функция сводится к рациональной с помощью подстановки:

$$\cos x = t,\ \sin x = \sqrt{1-t^2},\ x = \arccos t,\ dx=-\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}. \qquad (1.5.1)$$

2. Если $R(\sin x, \cos x)$ – **нечетная функция относительно $\cos x$**, т.е.

$$R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x),$$

то интеграл рационализируется подстановкой:

$$\sin x = t,\ \cos x = \sqrt{1-t^2},\ x = \arcsin t,\ dx = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}. \qquad (1.5.2)$$

3. Если $R(\sin x, \cos x)$ – **четная функция относительно $\sin x$ и $\cos x$**, т.е.

$$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x),$$

то интеграл рационализируется подстановкой:

$$\mathrm{tg}\, x = t,\ \sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}},\ \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}},\ x = \mathrm{arctg}\, t,\ dx = \frac{dt}{1+t^2}. \qquad (1.5.3)$$

Пример 3. Найти $\int \frac{\sin^3 x dx}{\cos x - 3}$.

Решение. Заметим, что подынтегральная функция нечетная относительно $\sin x$. Действительно $\frac{(-\sin x)^3}{\cos x - 3} = -\frac{\sin^3 x}{\cos x - 3}$. Тогда удобнее воспользоваться подстановкой (1) $\cos x = t$; $\sin x = \sqrt{1-t^2}$; $dx = -\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$

$$\int \frac{\sin^3 x dx}{\cos x - 3} dx = -\int \frac{\sqrt{(1-t^2)^3}}{t-3} \cdot \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = -\int \frac{1-t^2}{t-3} dt = \int \frac{t^2-1}{t-3} dt$$

Под знаком интеграла неправельная дробь, выделим целую часть.

$$\begin{array}{l|l} t^2 - 1 & t-3 \\ \cline{2-2} \underline{t^2 - 3t} & t+3 \\ \quad 3t - 1 & \\ \quad \underline{3t - 9} & \\ \qquad 8 & \end{array}$$

Тогда $\int \frac{t^2-1}{t-3} dt = \int \left(t + 3 + \frac{8}{t-3} \right) dt = \frac{t^2}{2} + 3t + 8\ln|t-3| + c =$

$$= \frac{\cos^2 x}{2} + 3\cos x + 8\ln|\cos x - 3| + c.$$

Пример 4. Найти $\int \frac{\cos x dx}{4+3\cos^2 x}$.

Решение. Заметим, что подынтегральная функция нечетная относительно cos$x$. Действительно $\frac{-\cos x}{4+3(-\cos x)^2} = -\frac{\cos x}{4+3\cos^2 x}$. Тогда удобнее воспользоваться подстановкой (2)

$\sin x = t$, $\cos x = \sqrt{1-t^2}$, $x = \arcsin t$, $dx = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$.

$$\int \frac{\cos x dx}{4+3\cos^2 x} = \int \frac{\sqrt{1-t^2}}{4+3\left(\sqrt{1-t^2}\right)^2} \cdot \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int \frac{dt}{4+3(1-t^2)} =$$

$$= \int \frac{dt}{4+3-3t^2} = \int \frac{dt}{7-3t^2} = -\frac{1}{3} \int \frac{dt}{t^2 - \frac{7}{3}} = -\frac{1}{3} \int \frac{dt}{t^2 - \left(\sqrt{\frac{7}{3}}\right)^2} =$$

$$= -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{7}{3}}} \ln \left| \frac{t - \sqrt{\frac{7}{3}}}{t + \sqrt{\frac{7}{3}}} \right| + c = -\frac{1}{6} \cdot \sqrt{\frac{7}{3}} \ln \left| \frac{\cos x - \sqrt{\frac{7}{3}}}{\cos x + \sqrt{\frac{7}{3}}} \right| + c.$$

Пример 5. Найти $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 2\sin x \cdot \cos x - \cos^2 x}$.

Решение. Подынтегральная функция четная относительно $\sin x$ и $\cos x$. Действительно

$$\frac{1}{(-\sin x)^2 + 2(-\sin x)\cdot(-\cos x) - (-\cos x)^2} =$$

$$= \frac{1}{\sin^2 x + 2\sin x \cdot \cos x - \cos^2 x}.$$

Тогда удобнее воспользоваться подстановкой (1.6.3)

$\operatorname{tg} x = t$, $\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$, $\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$, $x = \operatorname{arctg} t$, $dx = \frac{dt}{1+t^2}$.

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x + 2\sin x \cdot \cos x - \cos^2 x} = \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{t^2}{1+t^2} + 2\frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} - \frac{1}{1+t^2}} =$$

$$=\int\frac{dt}{t^2+2t-1}=\int\frac{dt}{(t+1)^2-1-1}=\int\frac{d(t+1)}{(t+1)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t+1-\sqrt{2}}{t+1+\sqrt{2}}\right|+c=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{tgx+1-\sqrt{2}}{tgx+1+\sqrt{2}}\right|+c.$$

1.6.2. Интегралы вида $\int\sin^m x\cdot\cos^n xdx$.

Выделим здесь два случая, имеющие особенно важное значение.

Случай 1. По крайней мере, один из показателей m или n – нечетное положительной число.

Если n – нечетное положительной число, то применяется подстановка $\sin x = t$;

если m – нечетное положительное число, то применяется подстановка $\cos x = t$.

Пример 6. Найти $\int\cos x\cdot\sin^2 xdx$.

Решение. В нечетной степени cos x, значит используем подстановку $\sin x = t$.

$$\int\cos x\cdot\sin^2 xdx=\left|\begin{matrix}\sin x=t\\ \cos xdx=dt\end{matrix}\right|=\int t^2dt=\frac{t^3}{3}+c=\frac{\sin^3 x}{3}+c.$$

Пример 7. Найти $\int\sin^3 x\cdot\cos^4 xdx$.

Решение. В нечетной степени sin x, следовательно используем подстановку $\cos x = t$.

$$\int\sin^3 x\cdot\cos^4 xdx=\int\sin x\cdot\sin^2 x\cdot\cos^4 xdx=\int\cos^4 x\left(1-\cos^2 x\right)\sin xdx=$$

$$=\left|\begin{matrix}\cos x=t\\ -\sin xdx=dt\end{matrix}\right|=-\int t^4\left(1-t^2\right)dt=-\int\left(t^4-t^6\right)dt=\frac{t^7}{7}-\frac{t^5}{5}+c=$$

$$=\frac{\cos^7 x}{7}-\frac{\cos^5 x}{5}+c.$$

Случай 2. Оба показателя степени m и n – четные положительные числа. Здесь следует преобразовать подынтегральную функцию с помощью формул понижения степени:

$$\sin x\cdot\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x, \qquad (1.5.4)$$

$$\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x), \qquad (1.5.5)$$

$$\cos^2 x=\frac{1}{2}(1+\cos 2x). \qquad (1.5.6)$$

Пример 8. Найти $\int \sin^2 x \cdot \cos^2 x dx$.

Решение. Из формулы (4) следует, что

$$\sin^2 x \cdot \cos^2 x = (\sin x \cdot \cos x)^2 = \left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)^2 = \frac{1}{4}\sin^2 2x.$$

Применив теперь формулу (5), получаем:

$$\sin^2 x \cdot \cos^2 x = \frac{1}{4}\sin^2 2x = \frac{1}{4} \cdot \frac{1-\cos 4x}{2} = \frac{1}{8}(1-\cos 4x).$$

Итак,

$$\int \sin^2 x \cdot \cos^2 x dx = \frac{1}{8}\int (1-\cos 4x)dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int dx - \frac{1}{8}\int \cos 4x dx = \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\sin 4x + c.$$

1.6.3. Интегралы вида $\int tg^m x dx$ и $\int ctg^m x dx$, где m – целое положительное число.

При нахождении таких интегралов применяются формулы

$$tg^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1,\ ctg^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} - 1,$$

с помощью которых последовательно понижается степень тангенса и котангенса.

Пример 9. Найти $\int ctg^4 x dx$.

Решение.

$$\int ctg^4 x dx = \int ctg^2 x\left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1\right)dx = \int ctg^2 x\left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1\right)dx =$$

$$= \int ctg^2 x \cdot \frac{1}{\sin^2 x}dx - \int ctg^2 x dx = -\int ctg^2 x d(ctgx) - \int\left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1\right)dx =$$

$$= -\frac{ctg^3 x}{3} + ctgx + x + c.$$

4. Интегралы вида $\int \sin mx \cdot \cos nx dx$, $\int \cos mx \cdot \cos nx dx$, $\int \sin mx \cdot \sin nx dx$.

Тригонометрические формулы

$$\sin\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right], \qquad (1.5.7)$$

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right], \qquad (1.5.8)$$

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right]. \qquad (1.5.9)$$

дают возможность произведение тригонометрических функций представить в виде суммы или разности.

Пример 10. Найти $\int\sin 2x\cdot\cos 5xdx$.

Решение. Используя формулу (1.6.7), получим

$$\int\sin 2x\cdot\cos 5xdx=\frac{1}{2}\int\left(\sin 7x+\sin(-3x)\right)dx=\frac{1}{2}\int\sin 7xdx-\frac{1}{2}\int\sin 3xdx=$$

$$=-\frac{1}{14}\cos 7x+\frac{1}{6}\cos 3x+c.$$

Пример 11. Найти $\int\sin x\cdot\sin 2x\cdot\cos 5xdx$.

Решение. Применим к произведению $\sin x\cdot\sin 2x$ формулу (1.6.9)

$$\int\sin x\cdot\sin 2x\cdot\cos 5xdx=\frac{1}{2}\int\left(\cos(x-2x)-\cos(x+2x)\right)\cos 5xdx=$$

$$=\frac{1}{2}\int\left(\cos x-\cos 3x\right)\cos 5xdx=\frac{1}{2}\int\cos x\cdot\cos 5xdx-\frac{1}{2}\int\cos 3x\cdot\cos 5xdx.$$

Применим формулу (1.6.8):

$$\int\sin x\cdot\sin 2x\cdot\cos 5xdx=\frac{1}{2}\int\frac{1}{2}\left(\cos(x+5x)+\cos(x-5x)\right)dx-$$

$$-\frac{1}{2}\int\frac{1}{2}\left(\cos(3x+5x)+\cos(3x-5x)\right)dx=$$

$$=\frac{1}{4}\int\left(\cos 6x+\cos 4x\right)dx-\frac{1}{4}\int\left(\cos 8x+\cos 2x\right)dx=$$

$$=\frac{1}{24}\sin 6x+\frac{1}{16}\sin 4x-\frac{1}{32}\sin 8x-\frac{1}{8}\sin 2x+c.$$

Задачи для самостоятельного решения. Найти интегралы.

194. $\int\sin^3 xdx.$ 195. $\int\sin^4 xdx.$

196. $\int\sin^5 xdx.$ 196. $\int\cos^7 xdx.$

198. $\int\cos^2 x\sin^2 xdx.$ 199. $\int\cos^2 x\sin^3 xdx.$

200. $\int \cos^3 x \sin^5 x dx.$ 201. $\int (1+2\cos x)^2 dx.$

202. $\int \frac{dx}{\sin 2x}.$ 203. $\int \frac{dx}{\cos\left(\frac{x}{3}\right)}.$

204. . $\int \frac{dx}{\sin 9x}.$ 205. $\int \frac{\sin x + \cos x}{\sin 2x} dx.$

206. $\int \sin 3x \cos x dx.$ 207. $\int \sin 3x \sin 5x dx.$

208. $\int \sin(5x - \frac{\pi}{4}) \cos x dx.$ 209. $\int \sin\left(\frac{x}{3}\right) x \sin\left(\frac{2x}{3}\right) dx.$

210. . $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} dx.$ 211. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} dx.$

212. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^5 x} dx.$ 213. $\int \frac{\sin^5 x}{\cos^3 x} dx.$

214. $\int \mathrm{tg}^4 x dx.$ 215. $\int \mathrm{tg}^5 x dx.$

216. $\int \frac{dx}{1+\sin x}.$ 217. $\int \frac{dx}{3+\cos x}.$

218. $\int \frac{dx}{3\sin x + 4\cos x}.$ 219. $\int \frac{dx}{2\sin x + \sin 2x}.$

220. $\int \frac{dx}{\sin x - \cos x}.$ 221. $\int \frac{dx}{\sin x + \cos x}.$

222. $\int \frac{dx}{3\sin^2 x + 5\cos^2 x}.$ 223. $\int \frac{dx}{\sin^2 x - 5\sin x \cos x}.$

224. $\int \frac{dx}{8 - 4\sin x + \cos x}.$ 225. $\int \frac{dx}{(\sin x + \cos x)^2}.$

226. $\int \frac{\cos 2x}{\cos^4 x} dx.$ 227. $\int \frac{dx}{\cos^5 x}.$

228. $\int \frac{dx}{\cos x + 2\sin x + 3}.$ 229. $\int \mathrm{ctg}^5 x dx$

230. $\int \frac{1+\mathrm{tg}x}{\sin 2x} dx.$ 231. $\int \frac{dx}{1+3\sin^2 x}.$

ГЛАВА II. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Практическое занятие 2.1. Линейный интеграл. Формула Ньютона-Лейбница. Замена переменной. Интегрирование по частям

2.1.1. Формула Ньютона-Лейбница

Существует несколько типов определенных интегралов в зависимости от вида области интегрирования (лекция 3.6).

Если интегрируемая функция задана на точках прямой, интеграл называют ***линейным***. Он равен пределу интегральной суммы, т.е. числу, его записывают:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i. \qquad (2.1.1)$$

Интервал от a до b называют ***интервалом интегрирования***. При вычислении линейного интеграла пользуются формулой Ньютона-Лейбница, согласно которой линейный интеграл равен *приращению любой из первообразных* для функций $f(x)$ на интервале интегрирования [$a; b$]:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \qquad (2.1.2)$$

Разность значений функции $F(x)$ часто записывают так:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b \qquad (2.1.3)$$

где знак $\Big|_a^b$ – означает, что в функцию $F(x)$ надо подставить вместо аргумента сначала верхний предел, затем нижний и из первого результата вычесть второй.

Найдем несколько простых интегралов с помощью полученной формулы.

Пример 1. $\int_1^2 x^4 dx = \frac{x^5}{5}\Big|_1^2 = \frac{2^5 - 1^5}{5} = \frac{31}{5} = 6,2$

Пример 2. $\int_e^{e^3} \frac{dx}{x} = \ln x\Big|_e^{e^3} = \ln e^3 - \ln e = 3 - 1 = 2$

Пример 3. $\int_1^2 e^x dx = e^x\Big|_1^2 = e^2 - e = e(e-1) \cong 2,7(2,7-1) = 4,59$

Пример 4. $\int\limits_0^{\pi/2} \sin x dx = -\cos x\Big|_0^{\pi/2} = -\cos\frac{\pi}{2} + \cos 0 = 1$

Пример 5. $\int\limits_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{1+x^2}} = \sqrt{1+x^2}\Big|_0^1 = \sqrt{2} - 1 = 0,4$

До сих пор считалось, что нижний предел в линейном интеграле $\int\limits_a^b f(x)dx$ меньше верхнего ($\alpha < b$).

Для ряда случаев удобно распространить определение линейного интеграла, когда $\alpha > b$. Если $\alpha > b$, то будем считать, что

$$\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx.$$

Далее следует отметить, что вычисление линейного интеграла с помощью неопределенного по формуле Ньютона-Лейбница на практике не всегда возможно. Во-первых, первообразная может не выражаться через известные элементарные функции, т.е. не берется соответствующий неопределенный интеграл, либо первообразная не выражается через известные неэлементарные (специальные) функции. Во-вторых, найденная первообразная может оказаться очень громоздкой. И, наконец, функция, которую надо проинтегрировать, может быть задана не формулой, а например, таблицей значений или графиком. Во всех этих случаях линейный интеграл вычисляют приближенно с помощью численного интегрирования.

Задачи для самостоятельного решения. Вычислить интегралы.

1. $\int\limits_0^1 \sqrt{1+x dx}$;
2. $\int\limits_{-2}^{-1} \frac{dx}{(5x+1)^3}$;
3. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{tg} x dx$;
4. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx$;

5. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2(3x)dx;$

6. $\int_0^1 (e^x - 1)^4 e^x dx;$

7. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x dx}{\sqrt[3]{\sin x}};$

8. $\int_0^1 \frac{xdx}{(1+x^2)^2};$

9. $\int_1^e \frac{1+\ln x}{x} dx;$

10. $\int_0^{16} \frac{dx}{\sqrt{x+9}-\sqrt{x}};$

2.1.2. Замена переменной интегрирования в линейном интеграле

Переход к новой переменной интегрирования в определенном интеграле проводят по формуле:

$$\int_a^b f(x)dx = \left| \begin{array}{c} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t)dt \\ a = \varphi(t_1) \\ b = \varphi(t_2) \end{array} \right| = \int_{t_1}^{t_2} f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)dt \qquad (2.1.4)$$

где функция $x = \varphi(t)$ – должна быть дифференцируемой, а обратная $t = \psi(x)$ – однозначной. Подынтегральное выражение в формуле (2.1.4) преобразуется так же, как в неопределенном интеграле. Однако очень важно подчеркнуть, что одновременно с преобразованием подынтегрального выражения, следует пересчитать пределы интегрирования, так как у новой переменной t будут другие границы изменения. Эти границы находят из уравнений:

$$a = \varphi(t_1)$$
$$b = \varphi(t_2)$$

Уравнения получают путем подстановки $x = \alpha$, $x = b$ в функцию $x = \psi(t)$. Возвращаться к старой переменной x, как это было в случае неопределенного интеграла, здесь не нужно.

Пример 6. Вычислить интеграл: $\int\limits_0^8 \frac{\sqrt{x+1}}{x+3}dx$.

Чтобы избавиться от корня, возьмем его за новую переменную:

$$\int\limits_0^8 \frac{\sqrt{x+1}}{x+3}dx = \left| \begin{array}{ll} \sqrt{x+1} = t & dx = 2tdt \\ x+1 = t^2 & \sqrt{0+1} = t_1 \\ x = t^2 - 1 & \sqrt{8+1} = t_2 \end{array} \right| = \int\limits_1^3 \frac{t}{(t^2-1)+3} 2tdt = 2\int\limits_1^3 \frac{t^2 dt}{t^2+2}$$

$$\int\limits_0^8 \frac{\sqrt{x+1}}{x+3}dx = 2\int\limits_1^3 \frac{t^2+2-2}{t^2+2}dt = 2\int\limits_1^3 \frac{t^2+2}{t^2+2}dt - 4\int\limits_1^3 \frac{dt}{t^2+2}$$

$$\int\limits_0^8 \frac{\sqrt{x+1}}{x+3}dx = 2\int\limits_1^3 dt - 4\int\limits_1^3 \frac{dt}{t^2+2} = 2t\Big|_1^3 - \frac{4}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}}\Bigg|_1^3$$

$$\int\limits_0^8 \frac{\sqrt{x+1}}{x+3}dx = 4 - \frac{4}{\sqrt{2}}\left(\operatorname{arctg}\frac{3}{\sqrt{2}} - \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

В приведенном примере новые пределы интегрирования $t_1 = \sqrt{0+1} = 1$ и $t_2 = \sqrt{8+1} = 3$ определяются однозначно, так как за новую переменную t взяты только положительные значения корня: $t = +\sqrt{x+1}$, т.е. функция $t = \psi(x)$ – однозначна.

Пример 7. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{\ln 3} \frac{e^{2x}dx}{\sqrt{1+e^x}}$

Как и в предыдущем примере за новую переменную возьмем квадратный корень.

$$\int\limits_0^{\ln 3} \frac{e^{2x}dx}{\sqrt{1+e^x}} = \left| \begin{array}{ll} \sqrt{1+e^x} = t & \sqrt{1+e^0} = t_1 \\ e^x = t^2 - 1 & \sqrt{2} = t_1 \\ e^x dx = 2tdt & \sqrt{1+e^{\ln 3}} = t_2 \\ dx = \dfrac{2tdt}{t^2-1} & 2 = t_2 \end{array} \right| = \int\limits_{\sqrt{2}}^{2} \frac{(t^2-1)^2 2tdt}{t(t^2-1)}.$$

В результате интеграл сводится к двум табличным:

$$\int_0^{\ln 3}\frac{e^{2x}dx}{\sqrt{1+e^x}}=2\int_{\sqrt{2}}^{2}(t^2-1)dt=2\left(\frac{t^3}{3}-t\right)\Bigg|_{\sqrt{2}}^{2}=2\left(\frac{8}{3}-2-\frac{2\sqrt{2}}{3}+\sqrt{2}\right)=\frac{2(2+\sqrt{2})}{3}.$$

Задачи для самостоятельного решения. Вычислить интеграл.

1. $\int_3^8\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}dx;$
2. $\int_0^5\frac{dx}{2x+\sqrt{3x+1}}dx;$
3. $\int_0^4\frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}};$
4. $\int_3^8\frac{x}{\sqrt{x+1}}dx;$
5. $\int_0^{\ln 5}\frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}dx;$
6. $\int_{\ln 2}^{\ln 4}\frac{dx}{e^x-1};$
7. $\int_0^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}dx;$
8. $\int_0^5\frac{xdx}{\sqrt{x+4}};$
9. $\int_2^5\frac{x^2dx}{(x-1)\sqrt{x-1}};$
10. $\int_1^e\frac{\sin(\ln x)}{x}dx;$

2.1.3. Интегрирование по частям в линейном интеграле

Нахождение первообразной методом интегрирования по частям в линейном интеграле проводят по той же формуле, что и в неопределенном интеграле:

$$\int_a^b u\,d\upsilon = u\upsilon\Big|_a^b - \int_a^b \upsilon\,du.$$

Разница заключается лишь в том, что для линейного интеграла находят не саму первообразную, а её приращение на интервале интегрирования $[\alpha,b]$.

Пример 8. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{\pi/2} x\cos x dx$.

Решение. Разобьем на части подынтегральное выражение

$$\int\limits_0^{\pi/2} x\cos x dx = \begin{vmatrix} u = x; & d\upsilon = \cos x dx \\ du = dx; & \upsilon = \sin x \end{vmatrix} = x\sin x\Big|_0^{\pi/2} - \int\limits_0^{\pi/2} \sin dx$$

$$\int\limits_0^{\pi/2} x\cos x dx = x\sin x + \cos x\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2} - 0\sin 0 - \cos 0$$

$$\int\limits_0^{\pi/2} x\cos x dx = \frac{\pi}{2} - 1 = \frac{3{,}14}{2} - 1 = 0{,}57$$

В данном случае соответствующий неопределенный интеграл берется. Значение линейного интеграла найдено по формуле Ньютона-Лейбница.

Задачи для самостоятельного решения. Вычислить интегралы.

1. $\int\limits_2^3 x\ln(x-1)dx;$
2. $\int\limits_{-2}^0 x^2 e^{-\frac{x}{2}} dx;$
3. $\int\limits_2^3 x^3 \ln x dx;$
4. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin\frac{x}{2} dx;$
5. $\int\limits_0^1 arctgx dx;$
6. $\int\limits_0^{\pi} (x+2)\cos\frac{x}{2} dx;$

2.1.4. Приближенное вычисление линейного интеграла

Приближенное вычисление определенных интегралов по формулам прямоугольников, трапеций и Симпсона подробно рассмотрено в лекции 3.8. Вывод этих формул дан, исходя из ***геометрического смыла*** линейного интеграла, равного площади криволинейной трапеции.

В случае возрастающей функции на интервале $[a,b]$, формула левых прямоугольников, дающая значение интеграла с недостатком, имеет вид:

$$\int_a^b f(x)dx \cong \frac{b-a}{n}(y_0 + y_1 + ... + y_{n-1}) \qquad (2.1.4.1)$$

где y_0, y_1, …, y_{n-1} – значения подынтегральной функции в **начале** каждого частичного интервала.

Если значения функций берутся **в конце** частичных интервалов, то приближенное значение интеграла получают с избытком:

$$\int_a^b f(x)dx \cong \frac{b-a}{n}(y_1 + y_2 + ... + y_n) \qquad (2.1.4.2)$$

Формула правых прямоугольников. Обе формулы имеют сравнительно большую погрешность (первого порядка малости). Так для левых прямоугольников главный член погрешности на частичном интервале равен

$$R_{0i} = \frac{h^2}{2} f'(\overline{x}_i).$$

Суммирование по всему интервалу $[a, b]$ дает общую ошибку

$$R_{0i} = \sum_{i=1}^{n} R_{0i} = \frac{h}{2}\sum_{i-1}^{n} f'(\overline{x}_i) \cdot h = \frac{h}{2}\int_a^b f'(x)dx \le \frac{h(b-a)}{2}\max f'(x).$$

Если учесть, что $h = \dfrac{b-a}{n}$, то *верхнюю* границу абсолютной ошибки можно записать так

$$\delta_n \le \frac{(b-a)^2}{2n}\max f'(x), \quad x \in [a,b].$$

При *уменьшении* в два раза числа разбиений интервала [a, b] абсолютная ошибка возрастает также в два раза.

По сравнению с формулами (2.1.4.1) и (2.1.4.2) более точным является метод *средних прямоугольников*, т.е. когда значения функции $f(x)$ вычисляют в срединах каждого частного интервала:

$$\int_a^b f(x)dx \cong \frac{b-a}{n}(\bar{y}_1 + \bar{y}_2 + ... + \bar{y}_n) \qquad (2.1.4.3)$$

При этом верхняя граница абсолютной ошибки равна

$$\delta_n \leq \frac{(b-a)^3}{24n^2} \max f''(x), \quad x \in [a,b].$$

Если число точек (узлов) увеличить в два раза, точность формулы (2.1.4.3) улучшится в четыре раза. В самом деле

$$\delta_{2n} \leq \frac{(b-a)^3}{24(2n)^2} \max f''(x) = \frac{1}{4}\frac{(b-a)^3}{24n^2} \max f''(x) = \frac{\sigma_n}{4}.$$

Однако, если подынтегральная функция $f(x)$ определяется из эксперимента в дискретном наборе узлов, то метод средних прямоугольников применить нельзя из-за отсутствия значений $f(x)$ в средних точках $\bar{x}_i$. В этом случае для интегрирования используют формулы трапеций и Симсона.

По формуле трапеций приближенное значение линейного интеграла равно

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + ... + y_{n-1}\right) \qquad (2.1.4.4)$$

Абсолютная ошибка, которая получается при вычислении интеграла по этой формуле, не превосходит величины:

$$\delta_n \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} \max f''(x), \quad x \in [a,b] \qquad (2.1.4.5)$$

Однако, она в два раза больше по сравнению с методом средних прямоугольников. В обоих случаях, чем больше n – тем меньше ошибка.

На практике обычно трудно определить max $f''(x)$, поэтому для оценки верхней границы погрешности пользуются другим выражением:

$$\delta_n = \frac{J_n - J_{n/2}}{3} \qquad (2.1.4.6)$$

Формулу (2.1.4.6) получают следующим образом. Уменьшим число разбиений интервала $[a, b]$ в два раза: $n/2$ и найдем, во сколько раз возрастет верхняя граница ошибки

$$\delta_{n/2} \le \frac{(b-a)^3}{12\left(\frac{n}{2}\right)^2} \max f''(x) = 4\delta_n$$

Точное значение линейного интеграла можно записать двумя способами

$$\int_a^b f(x)dx = J_n + \delta_n \qquad (2.1.4.7)$$

$$\int_a^b f(x)dx = J_{n/2} + 4\delta_n \qquad (2.1.4.8)$$

где J_n – приближенное значение интеграла, полученное при разбиении интервала $[a, b]$ на n частей; $J_{n/2}$ – приближенное значение интеграла при разбиении на $\frac{n}{2}$. Вычитая соответствующие части равенств (2.1.4.7) и (2.1.4.8), получим: $0 = J_n - J_{n/2} - 3\delta_n$.

Откуда следует, что

$$\delta_n = \frac{J_n - J_{n/2}}{3}.$$

Формула парабол (формула Симпсона) имеет вид:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}[y_0 + y_n + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{n-2})] \qquad (2.1.4.9)$$

Формулу (2.1.4.9) называют формулой парабол или формулой Симпсона. Верхняя граница погрешности при вычислениях интеграла по этой формуле равна

$$\delta_n \le \frac{(b-a)^5}{18n^4} \max f^{IV}(x), \quad x \in [a,b] \tag{2.1.4.10}$$

Погрешность имеет четвертый порядок малости. Формула Симпсона позволяет получить высокую точность, если четвертая производная подынтегральной функции не слишком велика. На практике в случае формулы Симпсона для δ_n. Пользуется таким равенством:

$$\delta_n = \frac{J_n - J_{n/2}}{15} \tag{2.1.4.11}$$

Его получают аналогично равенству (2.1.4.6). При уменьшении числа разбиений интервала $[a,\ b]$ в два раза, верхняя граница ошибки возрастает в 16 раз:

$$\delta_{n/2} \le \frac{(b-a)^5}{18\left(\frac{n}{2}\right)^4} \max f^{IV}(x) = 16\delta_n,$$

поэтому $\begin{cases} \int\limits_a^b f(x)dx = J_n + \delta_n \\ \int\limits_a^b f(x)dx = J_{n/2} + 16\delta_n \end{cases}$; отсюда $\delta_n = \dfrac{J_n - J_{n/2}}{15}$.

Пример. Вычислишь по формуле Ньютона-Лейбница и приближенно линейный интеграл:

$$\int\limits_1^3 x^2 dx$$

полученные результаты сравнить

1. Найдем точное значение данного интеграла по формуле Ньютона-Лейбница:

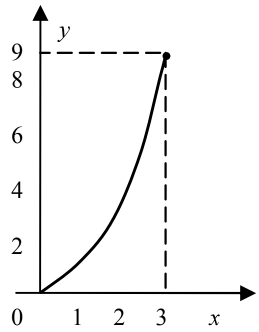

Рис. 2.1.4.1

$$\int_1^3 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^3 = 9 - \frac{1}{3} = 8,6666...$$

2. Построим график подынтегральной функции (рис. 2.1.4.1).

Разобьем интервал $b - a = 3 - 1 = 2$ на десять частей, т.е. $n = 10$

$$\frac{b-a}{n} = \frac{2}{10} = 0,2$$

$$h = 0,2$$

Вычислим значения подынтегральной функции в точках: $x_0 = 1$; $x_1 = 1,2$; $x_2 = 1,4$ и т.д., а также в срединах частичных интервалов. Результаты занесем в таблицу.

Таблица

№	x_i	$y = x^2$	№	x_i	$y = x^2$	№	$\overline{x}_i$	$\overline{y} = x^2$
x_0	1	$y_0 = 1$	x_0	1	1			
x_1	1,2	$y_1 = 1,44$				$\overline{x}_1$	1,1	$\overline{y}_1 = 1,21$
x_2	1,4	$y_2 = 1,96$	x_1	1,4	1,96	$\overline{x}_2$	1,3	$\overline{y}_2 = 1,69$
x_3	1,6	$y_3 = 2,56$				$\overline{x}_3$	1,5	$\overline{y}_3 = 2,25$
x_4	1,8	$y_4 = 3,24$	x_2	1,8	3,24	$\overline{x}_4$	1,7	$\overline{y}_4 = 2,89$
x_5	2	$y_5 = 4$				$\overline{x}_5$	1,9	$\overline{y}_5 = 3,61$
x_6	2,2	$y_6 = 4,84$	x_3	2,2	4,84	$\overline{x}_6$	2,1	$\overline{y}_6 = 4,41$
x_7	2,4	$y_7 = 5,76$				$\overline{x}_7$	2,3	$\overline{y}_7 = 5,29$
x_8	2,6	$y_8 = 6,76$	x_4	2,6	6,76	$\overline{x}_8$	2,5	$\overline{y}_8 = 6,25$
x_9	2,8	$y_9 = 7,84$				$\overline{x}_9$	2,7	$\overline{y}_9 = 7,29$
x_{10}	3	$y_{10} = 9$	x_5	3	9	$\overline{x}_{10}$	2,9	$\overline{y}_{10} = 8,41$
$\sum_{i=0}^{9} y_i = 39,4$; $\sum_{i=1}^{10} y_i = 47,4$								$\sum_{i=1}^{10} \overline{y}_i = 43,3$

По формуле левых прямоугольников (с недостатком) находим

$$\int_1^3 x^2 dx \cong \frac{b-a}{n}(y_0 + y_1 + ... + y_{n-1}) = 0,2 \cdot 39,4 = 7,88$$

По формуле правых прямоугольников (с избытком) получим

$$\int_1^3 x^2 dx \cong \frac{b-a}{n}(y_1 + y_2 + ... + y_n) = 0,2 \cdot 47,4 = 9,48\,.$$

Результаты сильно отличаются от истинного значения, т.е. вычисления проведены с большой погрешностью. Найдем приближенное значение данного интеграла по формуле средних прямоугольников

$$\int_1^3 x^2 dx \cong \frac{b-a}{n}(\overline{y}_1 + \overline{y}_2 + ... + \overline{y}_n) = 0,2 \cdot 43,3 = 8,66\,.$$

Результат весьма близкий к истинному.

Для сравнения вычислим приближенное значение данного интеграла по формулам трапеций и Симпсона.

По формуле трапеций для n = 10 с шагом h = 0,2 находим

$$\int_1^3 x^2 dx \cong \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + ... + y_{n-1}\right) = 0,2\left(\frac{1+9}{2} + 38,4\right) = 8,68$$

По формуле трапеций для $\dfrac{n}{2} = 5$ с шагом h = 0,4 получим

$$\int_1^3 x^2 dx \cong 0,4\left(\frac{1+9}{2} + 16,8\right) = 8,72\,.$$

Верхняя граница абсолютной ошибки равна

$$\delta_n = \frac{J_{10} - J_5}{3} = \frac{8,68 - 8,72}{3} = -0,013$$

И, наконец, по формуле Симпсона для n = 10; h = 0,2

$$\int_1^3 x^2 dx \cong \frac{b-a}{3n}[(y_0 + y_n + 4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7 + y_9) + 2(y_2 + y_4 + y_6 + y_8)]$$

$$\int_1^3 x^2 dx \cong \frac{0,2}{3}[1 + 9 + 4(1,44 + 2,56 + 4 + 5,76 + 7,84) + 2(1,96 + 3,24 + 4,84 + 6,76)]$$

$$\int_1^3 x^2 dx \cong \frac{0,2}{3}(10 + 4 \cdot 21,6 + 2 \cdot 16,8) = \frac{0,2 \cdot 130}{3} = 8,666\,.$$

Как и следовало ожидать, самую высокую точность вычислений дает формула парабол (Симпсона), а затем формула средних прямоугольников.

Вычислить самостоятельно интеграл.

$$\int_1^2 x^3 dx$$

1) по формуле Ньютона-Лейбница;
2) по формуле левых и правых прямоугольников с шагом $h = 0{,}1$;
3) по формуле средних прямоугольников;
4) по формулам трапеций и Симпсона;
5) найти верхнюю границу погрешности для вычислений по формулам трапеций и Симпсона.

Практическое занятие 2.2. Несобственные интегралы I и II рода

Определенный линейный интеграл существует, если выполнены два условия, а именно:
1. интервал интегрирования конечен;
2. подынтегральная функция в интервале интегрирования нигде не обращается в бесконечность.

Такие определенные интегралы называют интегралами в собственном смысле этого слова, или собственными. Однако иногда приходится иметь дело с интегралами, у которых нарушено одно из этих условий. Они получили название ***несобственных***.

2.2.1. Линейные интегралы с бесконечными пределами (I рода)

Дан определенный линейный интеграл:

$$\int_a^b f(x)dx$$

у которого $f(x)$ – непрерывна на всей числовой оси $(-\infty;\infty)$, и интервал интегрирования $[a,b]$ – конечен. Пусть одна из границ интервала $[a,b]$, или обе стремятся к бесконечности. Тогда пределы:

$$\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx = \int_a^{\infty} f(x)dx$$

$$\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx = \int_{-\infty}^{b} f(x)dx$$

$$\lim_{\substack{b\to\infty \\ a\to-\infty}}\int_a^b f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$

называют несобственными интегралами первого рода, или интегралами с бесконечными границами.

Если эти пределы равны конечному числу, то в таких случаях говорят, что несобственные интегралы первого рода ***сходятся.***

Если пределы не существуют или равны бесконечности, то несобственные интегралы ***расходятся*** (не существуют).

Несобственные интегралы первого рода с одной бесконечной границей находят по формулам:

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\left[F(b)-F(a)\right]$$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\left[F(b)-F(a)\right]$$

Поскольку под знаком пределов стоят определенные интегралы с конечными границами, их можно вычислять по формуле Ньютона-Лейбница (при условии, что соответствующий неопределенный интеграл берется), а затем найти предел полученного выражения.

Вычисление интеграла, у которого обе границы бесконечны, сводят к вычислению суммы двух несобственных интегралов с одной бесконечной границей:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_0^{\infty} f(x)dx$$

Вычислить несобственные интегралы:

Пример 1. $\int_0^{\infty} e^{-3x}dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-3x}dx = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{e^{-3x}}{-3}\right]_0^b = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{3e^{3b}}+\frac{1}{3e^0}\right] = \frac{1}{3}$

Интеграл сходится.

Пример 2. $\int_0^{\infty}\cos 5x dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b \cos 5x dx = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{\sin 5x}{5}\right]_0^b = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{\sin 5b-\sin 0}{5}\right]$

Функция $\sin 5b$ при $b\to\infty$ не имеет предела, интеграл расходится.

Пример 3. $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x} = \lim_{b\to\infty}\int_1^b\frac{dx}{x} = \lim_{b\to\infty}\left[\ln x\right]_1^b = \lim_{b\to\infty}\left[\ln b-\ln 1\right] = \infty$

Интеграл расходится.

Пример 4. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2}+\int\limits_{0}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}$

Вычислим каждый из двух интегралов с одной бесконечной границей:

$$\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{a\to-\infty}\int\limits_{a}^{0}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{a\to-\infty}\left[\operatorname{arctg}x\right]_a^0=\lim_{a\to-\infty}(\operatorname{arctg}0-\operatorname{arctg}a)=\frac{\pi}{2}$$

$$\int\limits_{0}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{b\to\infty}\int\limits_{0}^{b}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{b\to\infty}\left[\operatorname{arctg}x\right]_0^b=\lim_{b\to\infty}(\operatorname{arctg}b-\operatorname{arctg}0)=\frac{\pi}{2}.$$

Складывая найденные значения двух несобственных интегралов, получим:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi.$$

Данный интеграл сходится.

Пример 5. $\int\limits_{1}^{\infty}\frac{dx}{x(\ln x+1)^2}=\lim_{b\to\infty}\int\limits_{1}^{b}\frac{d(\ln x+1)}{(\ln x+1)^2}=\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{\ln x+1}\right]_1^b=$

$$=\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{\ln b+1}+1\right]=0+1=1.$$

Интеграл сходится.

Пример 6. $\int\limits_{2}^{\infty}\frac{\ln x}{x}dx=\lim_{b\to\infty}\int\limits_{2}^{b}\ln x\,d(\ln x)=\lim_{b\to\infty}\left[\frac{\ln^2 x}{2}\right]_2^b=$

$$=\lim_{b\to\infty}\left[\frac{\ln^2 b}{2}-\frac{\ln^2 2}{2}\right]=\infty$$

Интеграл расходится.

Пример 7. $\int\limits_{1}^{\infty}\frac{dx}{x^2(x+1)}.$

Разложим подынтегральную функцию на простейшие дроби.

$$\frac{dx}{x^2(x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x+1}.$$

Приводя простейшие дроби к общему знаменателю и освобождаясь от него получим:

$$1 = A(x^2 + x) + B(x + 1) + Cx^2.$$

Приравняем числовые коэффициенты при одинаковых степенях x:

$$\begin{array}{ll} x^2 & 0 = A + C;\ A = -C \\ x^1 & 0 = A + B;\ A = -B \\ x^0 & 1 = B \end{array}$$

Отсюда $C = 1$, $A = -1$, $B = 1$.

Заменим подынтегральную функцию суммой простейших дробей:

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^2(x+1)} = \lim_{b\to\infty}\int_1^b\left(-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x+1}\right)dx = \lim_{b\to\infty}\left[-\ln x-\frac{1}{x}+\ln(x+1)\right]_1^b = .$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[\ln\left|\frac{x+1}{x}\right|-\frac{1}{x}\right]_1^b$$

Применяя формулу Ньютона-Лейбница и вычисляя предел, окончательно получаем:

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^2(x+1)} = \lim_{b\to\infty}\left[\ln\left|\frac{b+1}{b}\right|-\frac{1}{b}-\ln 2+1\right] = 1-\ln 2.$$

Интеграл сходится.

Пример 8. $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

Сделаем замену переменной интегрирования:

$x = \dfrac{1}{t}$; $dx = -\dfrac{dt}{t^2}$; при $x = \sqrt{2}$; $t = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$; $x = \infty$; $t = 0$.

Тогда

$$\int_{\sqrt{2}}^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = -\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{0}\frac{t^2dt}{t^2\sqrt{1-t^2}} = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin\Big|_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\pi}{4}.$$

Интеграл сходится.

Задачи для самостоятельного решения. Вычислить интегралы.

1. $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-x^2}dx;$

2. $\int\limits_{0}^{\infty} e^{-\sqrt{x}} dx;$

3. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x}{16x^4+1} dx;$

4. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{dx}{2x^2-2x+1};$

5. $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{\left(x^2+2x\right)\ln 3};$

6. $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{\pi dx}{\left(1+9x^2\right)\operatorname{arctg}^2 3x};$

7. $\int\limits_{0}^{\infty} x\sin x dx;$

8. $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{4dx}{x\left(\ln^2 x+1\right)};$

9. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{(x+2)dx}{\sqrt[3]{\left(x^2+4x+1\right)^4}}.$

2.2.2. Линейные интегралы от разрывных функций, или несобственные интегралы второго рода

Рассмотрим интеграл $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$ у которого интервал $[a,b]$ конечен, а подынтегральная функция $f(x)$ – терпит разрыв второго рода в одном из концов интервала (рис. 2.2.1).

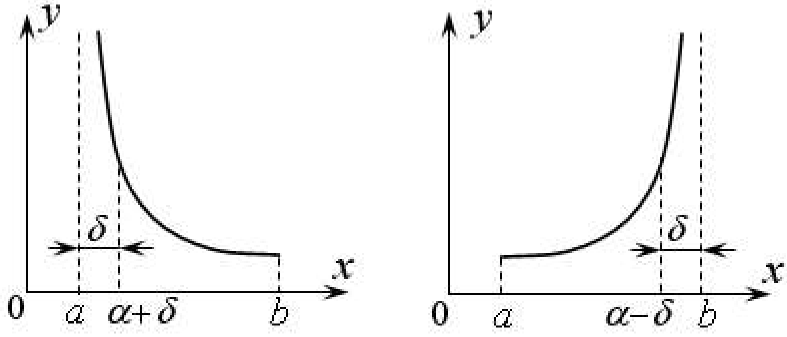

Рис. 2.2.1

Изолируем точки бесконечного разрыва δ – окрестностью и рассмотрим такие пределы:

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{a+\delta}^{b} f(x)dx = \int_{\underline{a}}^{b} f(x)dx$$

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{a}^{b-\delta} f(x)dx = \int_{a}^{\underline{b}} f(x)dx$$

Эти пределы называют несобственными интегралами второго рода. Разрыв в одном из концов интервала обозначен символом «–».

В случае конечных пределов, говорят, что несобственные интегралы сходятся.

Если пределы не существуют или равны бесконечности, то несобственные интегралы расходятся.

Подынтегральная функция может иметь бесконечный разрыв в промежуточной точке $x = c$ интервала $[\alpha, b]$. Интеграл от такой функции разбивают на два несобственных интеграла второго рода:

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{a}^{\underline{c}} f(x)dx + \int_{\underline{c}}^{b} f(x)dx,$$

$$a < c < b,$$

Если оба интеграла в правой части равенства сходятся, то сходится и интеграл $\int_{a}^{b} f(x)dx$; этот интеграл расходится, если расходятся хотя бы один из интегралов справа.

Интегралы от разрывных функций вычисляют по формулам, аналогичным для интегралов с бесконечными пределами:

$$\int_{\underline{a}}^{b} f(x)dx = \lim_{\delta\to 0}\int_{a+\delta}^{b} f(x)dx = \lim_{\delta\to 0}\left[F(b) - F(a+\delta)\right]$$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\delta\to 0}\int_a^{b-\delta} f(x)dx = \lim_{\delta\to 0}\left[F(b-\delta)-F(a)\right]$$

Пример 9. Вычислить несобственный интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$.

Решение. Подынтегральная функция обращается в бесконечность при $x = 1$. Изолируем точку разрыва и найдем предел:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{\delta\to 0}\int_0^{1-\delta}\frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{\delta\to 0}\left[-2\sqrt{1-x}\right]_0^{1-\delta} =$$

$$= \lim_{\delta\to 0}\left[-2\sqrt{1-1+\delta}+2\sqrt{1-0}\right] = 2$$

Интеграл сходится, т.е. существует.

Пример 10. Вычислить несобственный интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{x^2}$.

Решение. Функция $f(x)=\frac{1}{x^2}$ терпит разрыв второго рода в начале интервала [0,1]. Отступим от точки разрыва и найдем предел:

$$\int_{\underline{0}}^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{\delta\to 0}\int_{0+\delta}^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{\delta\to 0}\left[-\frac{1}{x}\right]_\delta^1 = \lim_{\delta\to 0}\left[-1+\frac{1}{\delta}\right] = \infty$$

Данный интеграл расходится, или не существует.

Пример 11. Вычислить несобственный интеграл $\int_1^2 \frac{xdx}{\sqrt{x-1}}$.

Решение. Подынтегральная функция терпит разрыв второго рода при $x = 1$. Сделаем замену переменной интегрирования.

$$\int_1^2 \frac{xdx}{\sqrt{x-1}} = \left|\begin{array}{lll} \sqrt{x-1}=t; & \sqrt{1-1}=t_1; & t_1=0 \\ x=t^2+1; & \sqrt{2-1}=t_2; & t_2=1 \\ dx=2tdt; & & \end{array}\right| = \int_0^1 \frac{\left(t^2+1\right)2tdt}{t} =$$

$$= 2\int_0^1 \left(t^2+1\right)dt = 2\left(\frac{t^3}{3}+t\right)\Bigg|_0^1 = 2\left(\frac{1}{3}+1\right) = \frac{8}{3}.$$

Интеграл сходится.

Пример 12. Вычислить интеграл $\int_0^2 \frac{dx}{x^2-4x+3}$.

Решение. Квадратный трехчлен, стоящий в знаменателе, имеет два корня $x = 1$ и $x = 3$, и его можно записать в виде произведения двух литейных множителей (x – 1)(x – 3). Следовательно, подынтегральная функция терпит бесконечный разрыв внутри отрезка [0,2] при x = 1. Разобьем интеграл на два несобственных интеграла.

$$\int_0^2 \frac{dx}{x^2-4x+3} = \int_0^1 \frac{dx}{(x-1)(x-3)} + \int_1^2 \frac{dx}{(x-1)(x-3)}.$$

Разложим подынтегральную функцию на простейшие дроби:

$$\frac{1}{(x-1)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-3}.$$

Освобождаясь от знаменателя получим:

$$1 = A(x-3) + B(x-1)$$

при $x = 1$ $\quad 1 = -2A,$ $\quad$ отсюда $A = -\frac{1}{2}$

при $x = 3$ $\quad 1 = 2B,$ $\quad$ отсюда $B = \frac{1}{2}$

Найдем значение первого интеграла:

$$\int_0^1 \left(-\frac{1}{2(x-1)} + \frac{1}{2(x-3)} \right) dx = \lim_{\delta \to 0} \left[-\frac{1}{2}\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|x-3| \right]_0^{1-\delta} =$$

$$= \lim_{\delta \to \infty} \left[\ln\sqrt{\frac{x-3}{x-1}} \right]^{1-\delta} = \lim_{\delta \to \infty} \left[\ln\sqrt{\frac{1-\delta-3}{1-\delta-1}} - \ln\sqrt{3} \right] =$$

$$= \lim_{\delta \to \infty} \left[\ln\sqrt{\frac{-(2+\delta)}{-\delta}} - \ln\sqrt{3} \right] = \ln\infty - \ln\sqrt{3} = \infty.$$

Интеграл расходится.

Задачи для самостоятельного решения. Вычислить интегралы.

1. $\displaystyle\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+9}};$
2. $\displaystyle\int_1^5 \frac{x^2 dx}{\sqrt{31(x^3-1)}};$
3. $\displaystyle\int_{0,5}^1 \frac{dx}{\sqrt[9]{1-2x}};$

4. $\int\limits_{0}^{1}\frac{x^4dx}{\sqrt[3]{1-x^5}}$;

5. $\int\limits_{0}^{3}\frac{\sqrt[3]{9}xdx}{\sqrt[3]{9-x^2}}$;

6. $\int\limits_{0}^{\frac{1}{3}}\frac{dx}{9x^2-9x+2}$;

7. $\int\limits_{1}^{2}\frac{xdx}{\ln 2\sqrt{\left(x^2-1\right)^3}}$;

8. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{tgx}dx}{\cos^2 x}$;

9. $\int\limits_{0}^{1}\frac{2xdx}{\sqrt{1-x^4}}$;

10. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{6}}\frac{\cos 3xdx}{\sqrt[6]{\left(1-\sin 3x\right)^5}}$;

11. $\int\limits_{0}^{\frac{2}{3}}\frac{\sqrt{\ln\left(2-3x\right)}dx}{2-3x}$;

12. $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\ln 2dx}{\left(1-x\right)\ln^2\left(1-x\right)}$.

Практическое занятие 2.7 Приложение линейного интеграла к решению геометрических задач

2.7.1. Вычисление площадей плоских фигур

Площадь плоских фигур произвольной формы можно находить по-разному. Начнем с задач о вычислении площадей с помощью линейного интеграла.

1. Система декартовых координат. Пусть фигура ограничена линиями, уравнения которых заданы функциями $y_1 = f_1(x)$ и $y_2 = f_2(x)$ (рис. 2.7.1).

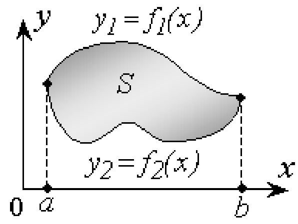

Рисунок 2.7.1

Геометрически линейный определенный интеграл от функции $y = f(x)$ (в предположении, что $y \geq 0$) равен площади криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком $y = f(x)$, отрезком $[\alpha, b]$ оси Ox и прямыми $x = \alpha, x = b$, т.е.:

$$S = \int_a^b f(x)dx.$$

Исходя из этого, площадь фигур любой формы всегда можно представить как, сумму или разность площадей нескольких криволинейных трапеций. В частности, площадь фигуры, изображенной на рисунке 2.7.1, будет равна:

$$S = \int_a^b f_1(x)dx - \int_a^b f_2(x)dx$$

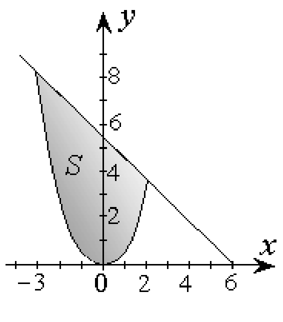

Рисунок 2.7.2

Где числа α и b являются координатой x для точек пересечения линий $y_1 = f_1(x)$ и $y_2 = f_2(x)$

Пример 1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y_1 = 6 - x;\ y_2 = x^2.$$

Решение. Графики функций $y_1 = 6 - x$ и $y_2 = x^2$ изображены на рисунке 2.7.2. Найдем координату x для точек пересечения из условия: $y_1 = y_2$

$$6 - x = x^2$$

$$x^2 + x - 6 = 0$$

Решая квадратное уравнение, получим:

$$x_1 = -3; \quad x_2 = 2$$

Искомая площадь S равна разности площадей двух криволинейных трапеций, ограниченных снизу отрезком [-3,2] оси Ox, а сверху графиками функций $y_1 = 6 - x$, $y_2 = x^2$:

$$S = \int_{-3}^{2} (6 - x)dx - \int_{-3}^{2} x^2 dx$$

Вычисляя линейные интегралы, найдем

$$S = 6x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\Bigg|_{-3}^{2} = 12 - 2 - \frac{8}{3} + 18 + \frac{9}{2} - 9 = 20{,}8 \text{ кв.ед.}$$

2. Если линия $y = f(x)$ задана ***параметрическими уравнениями***

$$y = y(t); \; x = x(t),$$

то площадь криволинейной трапеции находят с помощью линейного интеграла, совершая в нем замену переменной интегрирования по формуле:

$$S = \int_a^b y dx = \begin{vmatrix} y = y(t) \\ dx = x_t' dt \end{vmatrix} = \int_{t_1}^{t_2} y(t) \cdot x_t' dt$$

где t_1 и t_2– значения, между которыми изменяется параметр t. Эти значения определяют из уравнений $x(t_1) = a$, $x(t_2) = b$.

Пример 2. Вычислить площадь, ограниченную астроидой, уравнение которой задано параметрически: $x = a\cos^3 t$; $y = b\sin^3 t$.

Решение. График астроиды симметричен относительно координатных осей Ox и Oy (рис. 2.7.3). Поэтому искомая площадь равна:

$$S = 4\int_0^a y dx$$

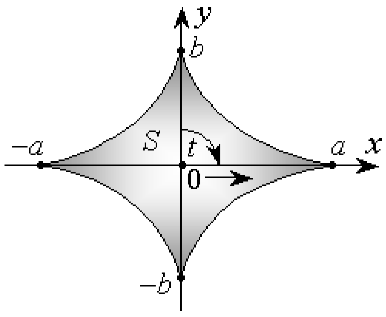

Рисунок 2.7.3

Найдем пределы изменения параметра t, когда переменная x пробегает значения от 0 до a.

$$0 = a\cos^3 t_1; \quad t_1 = \frac{\pi}{2}$$

$$a = a\cos^3 t_2; \quad t_2 = 0$$

Заменим в линейном интеграле y и dx их выражениями через параметр t из уравнения астроиды. С учетом найденных пределов для t, получим:

$$S = 4\int_0^a ydx = \left| \begin{matrix} y = b\sin^3 t \\ dx = -3a\cos^2 t \cdot \sin tdt \end{matrix} \right| = -12\int_{\pi/2}^{0} ab\sin^4 t\cos^2 tdt.$$

Преобразуем, подынтегральное выражение и поменяем местами верхний и нижний пределы:

$$S = 12ab\int_0^{\pi/2}\left(\frac{\sin 2t}{2}\right)^2 \sin^2 tdt = 3ab\int_0^{\pi/2}\sin^2 2t\frac{(1-\cos 2t)}{2}dt =$$

$$= \frac{3ab}{2}\int_0^{\pi/2}\frac{1-\cos 4t}{2}dt - \frac{3ab}{2}\int_0^{\pi/2}\sin^2 2t\cdot\cos 2tdt$$

Вычисление последних интегралов дает

$$S = \frac{3ab}{2}\left[\frac{t}{2} - \frac{\sin 4t}{8}\right]_0^{\pi/2} - \frac{3ab}{4}\cdot\frac{\sin^3 2t}{3}\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{3ab\pi}{8}\frac{1}{2} \text{ кв.ед.}$$

3. ***Система полярных координат.*** Если линия, ограничивающая плоскую фигуру, задана уравнением в полярной системе координат $r = r(\varphi)$, то вместо площади криволинейной трапеции берут площадь криволинейного сектора. **Криволинейным сектором называют фигуру, ограниченную графиком функции $r = r(\varphi)$ и двумя лучами, проведенными из полюса до пересечения с линией $r = r(\varphi)$.** (Рис. 2.7.4)

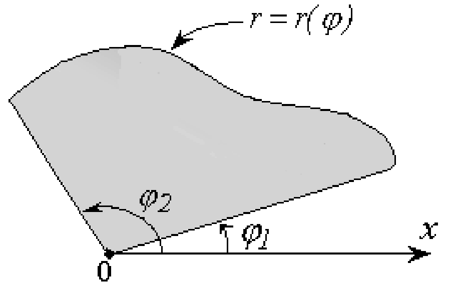

Рисунок 2.7.4

Лучи образуют с полярной осью углы φ_1 и φ_2. Площадь такого сектора выражают одним линейным интегралом.

$$S = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2(\varphi)d\varphi$$

Пусть фигура произвольной формы (Рис.2.7.5), ограничена линиями, уравнения которых заданы в полярной системе координат: $r_1 = r_1(\varphi)$ и $r_2 = r_2(\varphi)$.

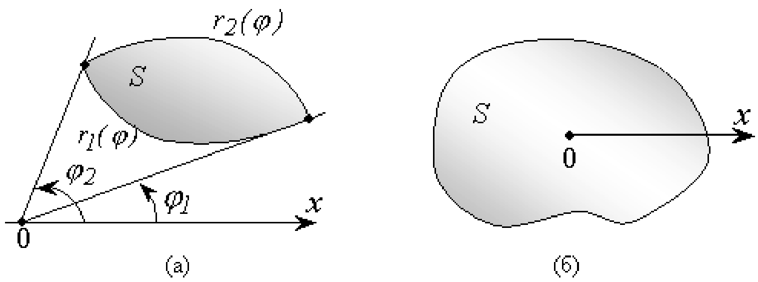

Рисунок 2.7.5

Очевидно, что ее площадь можно представить как разность площадей двух криволинейных секторов, ограниченных графиками функций $r_1(\varphi)$ и $r_2(\varphi)$:

$$S = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r_2^2(\varphi)d\varphi - \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r_1^2(\varphi)d\varphi$$

Пределы интегрирования φ_1 и φ_2 являются полярными углами для точек пересечения линий $r_1(\varphi)$ и $r_2(\varphi)$. Эти пределы находят из условия $r_1(\varphi) = r_2(\varphi)$.

Если полюс лежит внутри фигуры (Рис. 2.7.5), то полярный угол φ будет изменяться от 0 до 2π.

Пример 3. Вычислить площадь, ограниченную кардиоидой

$$r = a(1 + \cos\varphi)$$

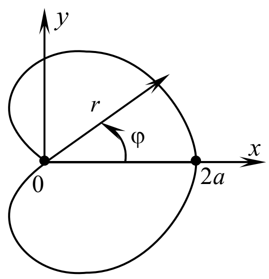

Рис. 2.7.6

Решение. График кардиоиды, рисунок 2.7.6, симметричен относительно полярной оси. Поэтому можно найти половину площади, заключенной внутри кардиоиды, а затем удвоить ее. Тогда полярный угол φ будет изменяться от 0 до π. Воспользуемся формулой для площади криволинейного сектора:

$$S = 2 \cdot \frac{1}{2}\int_0^{\pi} r^2(\varphi)d\varphi = \int_0^{\pi} a^2(1+\cos\varphi)^2 d\varphi$$

Преобразуем подынтегральное выражение и найдем первообразную

$$S = a^2\int_0^{\pi}(1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi)d\varphi = a^2\int_0^{\pi}\left(1+2\cos\varphi+\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right)d\varphi =$$

$$= a^2\int_0^{\pi}\left(\frac{3}{2}+2\cos\varphi+\frac{\cos 2\varphi}{2}\right)d\varphi = a^2\left[\frac{3}{2}\varphi+2\sin\varphi+\frac{\sin 2\varphi}{4}\right]_0^{\pi}$$

Подставляя верхний и нижний пределы, окончательно получим:

$$S = a^2\left(\frac{3\pi}{2}+2\sin\pi+\frac{\sin 2\pi}{4}-\frac{3\cdot 0}{2}-2\sin 0-\frac{\sin 0}{4}\right) = \frac{3\pi a^2}{2}$$

Задачи для самостоятельного решения. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

1. $y = 2\sqrt{x}$; $y = \sqrt{x}$; $x = 4$.
2. $x = 2$; $y = x$; $y = \dfrac{1}{x}$.
3. $y = x^2$; $y = 3 - x$.
4. $y^2 = x + 1$, $y^2 = 9 - x$.
5. $y = x^2$; $y = 2 + x$.
6. $y^2 = 4x$; $x^2 = 4y$.
7. $y^2 = 9x$; $y = 3x$.
8. $y = x^2$; $y = 2 - x$.
9. $y^3 = x$; $x = 1$; $x = 8$; $y = 0$.
10. $y = tgx$; $y = 0$; $x = \dfrac{\pi}{4}$.
11. $y = x^2 - 1$; $y = 1 - x$.

12. $x = 2\cos^3 t$; $y = 2\sin^3 t$ (астроида).
13. $x = 5\cos t$; $y = 3\sin t$ (эллипс).
14. $x = t^2 - 1$; $y = t^3 - 1$ $\left(-1 \le t \le 1\right)$.

2.7.2. Вычисление длин линий

Длину плоских кривых, заключенных между двумя точками A и B, можно найти с помощью криволинейного интеграла $\int\limits_{L_{AB}} f(x,y)dl$, если положить $f(x,y) \equiv 1$. В этом случае криволинейный интеграл, будет равен размерам области интегрирования, т.е. длине части линии L_{AB}.

$$l = \int\limits_{L_{AB}} dl$$

Переходя к линейному интегралу, дает следующие формулы для вычисления длины линии. Если кривая L_{AB} задана в декартовой системе координат непрерывной и дифференцируемой функцией $y = y(x)$, то вычисление ее длины сводят к вычислению линейного интеграла вида:

$$l = \int\limits_a^b \sqrt{1 + y_x'^2}\,dx$$

Пределы в линейном интеграле a и b – являются проекциями на ось Ox точек линии A и B соответственно.

Длину дуги AB кривой, заданной параметрическими уравнениями $x = x(t)$; $y = y(t)$, находят по формуле

$$l = \int\limits_{t_1}^{t_2} \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}\,dt$$

где t_1 и t_2 значения параметра t в точках A и B.

И наконец, длина линии L_{AB}, уравнение которой $r = r(\varphi)$ задано в полярной системе координат, равна линейному интегралу

$$l = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{r_\varphi'^2 + r^2}\,d\varphi$$

где φ_1 и φ_2 полярные углы точек A и B.

Пример 4. Найти длину полукубической параболы $y^2 = x^3$ от точки $A(0,0)$ до точки $B(4,8)$.

Решение. Длина отрезка полукубической параболы между точками A и B равна криволинейному интегралу

$$l = \int\limits_{L_{AB}} dl$$

Дифференциал длины кривой ***в декартовой системе координат*** выражают через ее уравнение $y = y(x)$ по формуле

$$dl = \sqrt{1 + y_x'^2}\,dx$$

Найдем его для данной линии $y = \sqrt{x^3}$:

$$y_x' = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{x};\ \ dl = \sqrt{1 + \tfrac{9}{4}x}\,dx$$

Переход от криволинейного интеграла к линейному и вычисление последнего дает искомую длину:

$$l = \int\limits_{L_{AB}} dl = \int\limits_0^4 \sqrt{1 + \tfrac{9}{4}x}\,dx = \frac{4}{9}\cdot\frac{2}{3}\left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{3/2}\Bigg|_0^4 = \frac{8}{27}\left(10\sqrt{10} - 1\right) \text{ лин.ед.}$$

Пример 5. Найти длину одной арки циклоиды:

$$\begin{matrix} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{matrix};\quad 0 \le t \le 2\pi$$

Решение. Выражение для дифференциала длины циклоиды через ее уравнение получено, в лекции 3.9 а, он равен

$$dl = \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}\,dt = a\sqrt{2}\sqrt{1 - \cos t}\,dt$$

Длину одной арки циклоиды найдем путем перехода к линейному интегралу

$$1=\int_L d1=a\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\cos t}\,dt=a\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\sqrt{2\sin^2\tfrac{t}{2}}\,dt$$

Вычисляя линейный интеграл, получим:

$$1=2a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}dt=-4a\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi}=-4a(\cos\pi-\cos 0)=8a \text{ лин.ед.}$$

Длина циклоиды равна восьми радиусам воспроизводящей ее окружности. Приведем еще один пример на вычисление длины известной линии, уравнение которой задано в ***полярной системе координат***.

Пример 6. Найти длину кардиоиды $r=a(1+\cos\varphi);\ \ 0\le\varphi\le 2\pi.$

Решение. В примере 3 настоящего параграфа мы нашли площадь, ограниченную кардиоидой, график которой приведен на рисунке 2.7.6.

Чтобы найти длину кардиоиды, выразим дифференциал длины $d\ell$ через ее уравнение

$$d1=\sqrt{r_\varphi'^2+r^2}\,d\varphi=\sqrt{(-a\sin\varphi)^2+a^2(1+\cos\varphi)^2}\,d\varphi$$

$$d1=\sqrt{a^2\sin^2\varphi+a^2+2a^2\cos\varphi+a^2\cos^2\varphi}\,d\varphi=a\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{(1+\cos\varphi)}\,d\varphi$$

Как уже отмечалось, график кардиоиды симметричен относительно полярной оси, поэтому можно найти половину длины, а затем удвоить ее, тогда полярный угол будет изменяться от 0 до π.

$$1=2\int_L d1=2\int_0^{\pi}a\sqrt{2}\cdot\sqrt{2\cos^2\tfrac{\varphi}{2}}\,d\varphi=4a\int_0^{\pi}\cos\tfrac{\varphi}{2}\,d\varphi$$

Вычисление последнего интеграла дает

$$1=\frac{4a\sin\frac{\varphi}{2}}{1/2}\Bigg|_0^{\pi}=8a \text{ лин.ед.}$$

Задачи для самостоятельного решения. Найти длины линий, заданные уравнениями

1. $y=\ln x$; $(3\le x\le 8)$
2. $y=\ln(\sin x)$; $\left(\dfrac{\pi}{4}\le x\le\dfrac{3\pi}{4}\right)$
3. $y=2\sqrt{x}$; $(0{,}5\le x\le 1)$

4. $y = e^{-x}$; $(1 \le x \le 2)$
5. $y = x\sqrt{x}$; $(0 \le x \le 4)$
6. $y = \ln(\cos x)$; $\left(0 \le x \le \frac{\pi}{4}\right)$
7. $x = 2\cos^3 t$; $y = 2\sin^3 t$
8. $x = 5\cos^2 t$; $y = 5\sin^2 t$; $\left(0 \le x \le \frac{\pi}{2}\right)$
9. $x = 4(\cos t + t\sin t)$; $y = 4(\sin t - t\cos t)$; $(0 \le t \le \pi)$
10. $x = 9(t - \sin t)$; $y = 9(1 - \cos t)$; $(0 \le t \le 2\pi)$
11. $r = 3(1 - \cos\varphi)$
12. $r = 6\cos^3\frac{\varphi}{3}$; $\left(0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}\right)$
13. $r = 2\sin^3\frac{\varphi}{3}$; $\left(0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}\right)$
14. $r = 3\sin\varphi$
15. $r = 3\cos\varphi$

2.7.3. Вычисление объемов тел

Объем тел, в зависимости от их формы и условий задачи, можно находить различными способами.

В частом случае, когда известна площадь поперечных сечений тела, его объем вычисляют с помощью линейного интеграла по формуле:

$$V = \int_a^b S(x)dx$$

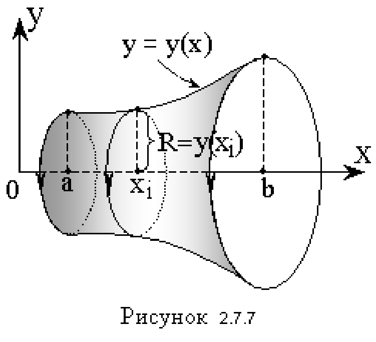

Рисунок 2.7.7

где *S(x)* – площадь сечения тела плоскостью, перпендикулярной оси *Ox*, *a* и *b* – проекции его крайних точек на ту же ось.

Исходя из этой формулы, находят объем **тел вращения**.

Пусть криволинейная трапеция, ограниченная сверху графиком непрерывной функции $y = y(x)$ и прямыми $x = a$, $x = b$, вращается вокруг оси *Ox* (Рис. 2.7.7).

В результате ее вращения образуется тело. Его плоскими сечениями, перпендикулярными оси *Ox*, являются круги с различными радиусами $R=y(x)$, площадь которых равна:

$$S(x) = \pi R^2 = \pi y^2(x)$$

Следовательно, объем полученного тела можно найти по формуле

$$V_x = \int_a^b S(x) = \pi \int_a^b y^2(x)dx$$

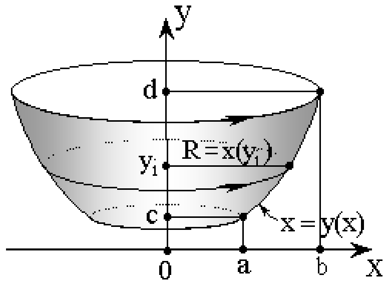

Рисунок 2.7.8

При вращении линии, ограничивающей криволинейную трапецию, вокруг оси Oy (Рис. 2.7.8) объем полученного тела равен:

$$V_y = \int_c^d S(y)dy = \pi \int_c^d x^2(y)dy$$

где *x(y)* – уравнение вращающейся линии решенное относительно переменной *x*.

Пример 7. Найти объем тела, полученного при вращении эллипса относительно осей Ox и Oy.

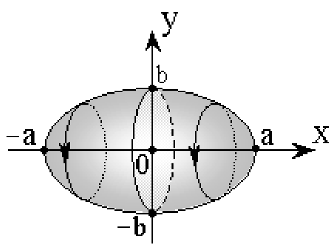

Рисунок 2.7.9

Решение. График эллипса $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ изображен на рисунке 2.7.9.

Координаты его крайних точек по оси $Ox: x_1 = -a, \ x_2 = a,$

по оси $Oy: y_1 = -b, \ y_2 = b.$

Объем тела, образованного вращением эллипса относительно оси Ox, найдем по формуле:

$$V_x = \pi \int_{-a}^{a} y^2(x)dx, \text{ где } y(x) = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}.$$

С учетом симметрии

$$V_x = 2\pi \int_0^a b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = \frac{2\pi b^2}{a^2} \left(a^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Bigg|_0^a = \frac{4}{3} \pi b^2 a$$

Аналогично, вычислим объем Vy

$$V_y = \pi \int_{-b}^{b} x^2(y)dy, \text{ где } x(y) = a\sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}}$$

$$V_y = 2\pi \int_0^b a^2 \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) dy = \frac{2\pi a^2}{b^2} \left(b^2 y - \frac{y^3}{3} \right) \Bigg|_0^b = \frac{4}{3} \pi a^2 b$$

Если $a = b$, то тела вращения относительно осей Ox и Oy становятся шаром, объем которого равен $\dfrac{4}{3}\pi a^3$.

Задачи для самостоятельного решения. Найти объемы тел вращения

1. $x^2 - y^2 = 9$; $x = 6$; $x = -6$; $V_{ox} = ?$
2. $y = x^2 + 1$; $x = 0$; $x = 2$; $y = 0$; $V_{ox} = ?$
3. $y = x^2$; $y = 2$; $V_{oy} = ?$
4. $y = 1 - x^2$; $x = 0$; $y = 0$; $V_{ox} = ?$
5. $y^2 = 4 - x$; $x = 0$; $V_{oy} = ?$
6. $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{1} = 1$; $y = 0$; $V_{ox} = ?$
7. $x = 3\cos^2 t$; $y = 4\sin^2 t$; $V_{oy} = ?$
8. $y = 2x - x^2$; $y = 0$; $V_{ox} = ?$
9. $y = e^x$; $x = 0$; $y = 0$; $x = 1$; $V_{ox} = ?$
10. $y = x^2$; $8x = y^2$; $V_{oy} = ?$