Интеграл от функции комплексного переменного

Кривые в комплексной плоскости

Кривой Γ на комплексной плоскости называется непрерывное[13] отображение отрезка $[\alpha;\beta]\subset\mathbb{R}$ в $\mathbb{C}$ (или в $\overline{\mathbb{C}}$):

$$z=\sigma(t)=x(t)+iy(t),\quad t\in[\alpha;\beta],\tag{11}$$

при этом t называется *параметром*, а уравнение (11) – *параметрическим уравнением кривой* Γ.

Точки на кривой упорядочены[14] в направлении роста параметра: если $t_1<t_2$, то говорят, что точка $z_1=\sigma(t_1)$ *предшествует точке* $z_2=\sigma(t_2)$, а точка z_2 *следует за точкой* z_1. Точка $A=\sigma(\alpha)$ называется *начальной точкой кривой* Γ, точка $B=\sigma(\beta)$ – *конечной точкой* Γ.

Направление движения вдоль кривой, соответствующее росту параметра, называется *положительным*, а противоположное – *отрицательным*.

Направление движения по кривой можно сменить, вводя, например, новый параметр $\tau=-t$:

$$z=\sigma(-\tau),\quad \tau\in[-\beta;-\alpha].$$

При этом начальной становится точка $\sigma(\beta)=B$, а конечной – точка $\sigma(\alpha)=A$. Кривую Γ, пробегаемую в обратном направлении, будем обозначать Γ^-.

Одну и ту же кривую можно параметризовать разными способами, например, уравнения

$$z=\sigma_1(t)=\cos t+i\sin t,\quad t\in[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}],\qquad \text{и}\qquad z=\sigma_2(t)=\sqrt{1-t^2}+it,\quad t\in[-1;1],$$

задают правую полуокружность единичного радиуса с центром в нуле.

Мы будем говорить, что кривые Γ: $z=\sigma(t)$, $t\in[\alpha;\beta]$, и γ: $z=\zeta(\tau)$, $\tau\in[a;b]$, *совпадают*, если найдётся непрерывная действительная функция $t=\upsilon(\tau)$, монотонно отображающая отрезок $[a;b]$ на отрезок $[\alpha;\beta]$ и такая, что $\sigma(\upsilon(\tau))=\zeta(\tau)$.

Если начальная и конечная точки кривой совпадают, то она называется *замкнутой*.

Если разным точкам кривой соответствует одна точка комплексной плоскости, т.е. точки $z_1=\sigma(t_1)$ и $z_2=\sigma(t_2)$ совпадают при $t_1\neq t_2$, то их называют *точками самопересечения* кривой. Исключение составляют начальная и конечная точка кривой: даже если они совпадают (как у замкнутой кривой), они не считаются точками самопересечения.

Кривая Γ называется *простой*, если она не имеет точек самопересечения.

Кривая называется *гладкой*, если функция $\sigma(t)$ непрерывно дифференцируема на $[\alpha;\beta]$ и $\sigma'(t)\neq 0$, причём, если кривая замкнута, то производные в точках α и β должны совпадать. Это означает, что функции $x(t)$ и $y(t)$ имеют непрерывные производные на $[\alpha;\beta]$, не обращающиеся в ноль одновременно, а для замкнутой кривой дополнительно выполняется $x'_+(\alpha)=x'_-(\beta)$ и $y'_+(\alpha)=y'_-(\beta)$.

Если кривую можно разбить на конечное число гладких кривых, то её называют *кусочно-гладкой*.

Простую замкнутую кусочно-гладкую кривую будем называть *замкнутым контуром*.

Кривую Γ, задаваемую условиями

$$z=\sigma(t),\quad t\geqslant\alpha,\quad \lim_{t\to+\infty}\sigma(t)=\infty,$$

[13]Непрерывность комплекснозначной функции $\sigma(t)$ действительного переменного t является частным случаем непрерывности функции комплексного переменного и означает непрерывность её действительной и мнимой частей – функций $x(t)$ и $y(t)$.

[14]В отличие от всего множества комплексных чисел.

будем называть *неограниченной кривой*. Неограниченная кривая также может быть определена на луче $(-\infty;\alpha]$, на бесконечном интервале $(-\infty;\infty)$, на полуинтервалах $[\alpha;\beta)$ или $(\alpha;\beta]$. Неограниченная кривая называется кусочно-гладкой, если она является кусочно-гладкой на любом конечном промежутке.

Интеграл от функции комплексной переменной

Здесь и в дальнейшем все кривые предполагаются кусочно-гладкими.

Пусть на кривой $\Gamma = \{z = \sigma(t),\ t \in [\alpha;\beta]\}$ определена функция $f(z)$.

Разобьём кривую на частичные дуги точками $z_0 = \sigma(\alpha)$, $z_1 = \sigma(t_1)$, $\ldots$, $z_{n-1} = \sigma(t_{n-1})$, $z_n = \sigma(\beta)$, где $t_0 = \alpha < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = \beta$.

Обозначим $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$. Длину наибольшего отрезка между двумя соседними точками z_{k-1} и z_k назовём *диаметром разбиения*: $d = \max_k |\Delta z_k|$.

На каждой частичной дуге между точками z_{k-1} и z_k возьмём произвольную точку z_k^* и составим сумму

$$\sum_{k=1}^{n} f(z_k^*)\Delta z_k,$$

называемую *интегральной суммой* для функции $f(z)$ по кривой Γ. Понятно, что значение этой суммы определяется тем, каким способом мы разбили кривую на частичные дуги, а также тем, в каких точках вычисляются значения функции $f(z)$.

Если существует (конечный) предел интегральных сумм, не зависящий от способа разбиения кривой Γ на частичные дуги и от выбора точек z_k^*, то он называется *интегралом от функции* $f(z)$ *по кривой* Γ и обозначается

$$\int_\Gamma f(z)\,dz \qquad \text{или} \qquad \oint_\Gamma f(z)\,dz$$

для незамкнутой или замкнутой кривой, соответственно.

Пример 4. Вычислим по определению интеграл от функции $f(z) = 1$ по произвольной (кусочно-гладкой) кривой Γ, соединяющей точки a и b ($a, b \in \mathbb{C}$):

$$\sum_{k=1}^{n} f(z_k^*)\Delta z_k = \sum_{k=1}^{n} 1\cdot\Delta z_k = z_1 - z_0 + z_2 - z_1 + \ldots + z_n - z_{n-1} = z_n - z_0 = b - a,$$

т.е. значение интеграла зависит только от конечных точек и не зависит от кривой, их соединяющей:

$$\int_\Gamma 1\,dz = b - a.$$

Интегралы такого типа (не зависящие от кривой, соединяющей точки a и b) можно записывать в виде

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(z)\,dz.$$

Свойства интегралов

1. `Связь с криволинейными интегралами от функций действительного переменного.` Пусть $f(z) = u(x;y) + iv(x;y)$. Пусть далее $\Delta z_k = \Delta x_k + i\Delta y_k$ и $z_k^* = x_k^* + iy_k^*$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{n} f(z_k^*)\Delta z_k = \sum_{k=1}^{n} \big(u(x_k^*;y_k^*) + iv(x_k^*;y_k^*)\big)\big(\Delta x_k + i\Delta y_k\big) =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \big(u(x_k^*;y_k^*)\Delta x_k - v(x_k^*;y_k^*)\Delta y_k\big) + i\sum_{k=1}^{n} \big(v(x_k^*;y_k^*)\Delta x_k + u(x_k^*;y_k^*)\Delta y_k\big).$$

Переходя к пределу при $\max|\Delta z_k| \to 0$, получаем

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \int_{\smile{AB}} u(x;y)\,dx - v(x;y)\,dy + i\int_{\smile{AB}} v(x;y)\,dx + u(x;y)\,dy. \qquad (12)$$

Таким образом, существование интеграла по кривой Γ от функции $f(z)$ равносильно существованию двух интегралов второго рода от действительной и мнимой частей функции $f(z)$.

Равенство (12) позволяет перенести некоторые свойства криволинейных интегралов на интегралы от функции комплексного переменного.

2. `Линейность.`

$$\int_\Gamma \big(af(z) + bg(z)\big)\,dz = a\int_\Gamma f(z)\,dz + b\int_\Gamma g(z)\,dz.$$

3. `Аддитивность по области.` Если кривые Γ_1 и Γ_2 не имеют общих точек, кроме, быть может, конечных, то

$$\int_{\Gamma_1\cup\Gamma_2} f(z)\,dz = \int_{\Gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\Gamma_2} f(z)\,dz.$$

4. `Смена направления.` При смене направления движения по кривой интеграл меняет знак:

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = -\int_{\Gamma^-} f(z)\,dz.$$

5. `Оценка модуля интеграла.`

$$\left|\int_\Gamma f(z)\,dz\right| \leqslant \int_{\smile{AB}} |f(z)|\cdot|dz| = \int_{\smile{AB}} |f(z)|\,dl,$$

поскольку $|dz| = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dl$. Таким образом, модуль интеграла от функции комплексной переменной не превосходит интеграла по длине дуги (криволинейного интеграла первого рода) от модуля функции.

6. `Формула вычисления.` Пусть $f(z) = u(x;y) + iv(x;y)$ и

$$\Gamma:\ z = \sigma(t) = x(t) + iy(t), \quad t \in [\alpha;\beta].$$

Из представления (12) и формулы вычисления криволинейных интегралов второго рода получаем:

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \int_{\breve{AB}} u(x;y)\,dx - v(x;y)\,dy + i\int_{\breve{AB}} v(x;y)\,dx + u(x;y)\,dy =$$
$$= \int_\alpha^\beta \big(u(x(t);y(t))x'(t) - v(x(t);y(t))y'(t)\big)\,dt + i\int_\alpha^\beta \big(v(x(t);y(t))x'(t) + u(x(t);y(t))y'(t)\big)\,dt =$$
$$= \int_\alpha^\beta \big(u(x(t);y(t)) + iv(x(t);y(t))\big)x'(t)\,dt + i\int_\alpha^\beta \big(u(x(t);y(t)) + iv(x(t);y(t))\big)y'(t)\,dt =$$
$$= \int_\alpha^\beta \big(u(x(t);y(t)) + iv(x(t);y(t))\big)\big(x'(t) + iy'(t)\big)\,dt = \int_\alpha^\beta f(\sigma(t))\sigma'(t)\,dt. \tag{13}$$

Пример 5. Вычислим интеграл

$$\oint_{C_\rho} \frac{dz}{z - z_0}, \tag{14}$$

где C_ρ – окружность с центром в точке z_0 радиуса ρ. Параметризуем её следующим образом:

$$C_\rho: \;\; z = z_0 + \rho e^{i\varphi}, \quad \varphi \in [0; 2\pi].$$

Тогда по формуле (13)

$$\oint_{C_\rho} \frac{dz}{z - z_0} = \int_0^{2\pi} \frac{\rho i e^{i\varphi}\,d\varphi}{\rho e^{i\varphi}} = \int_0^{2\pi} i\,d\varphi = 2\pi i.$$

Мы получили интересный результат: интеграл по окружности, проведённой вокруг точки z_0, от функции $\frac{1}{z-z_0}$ не зависит от радиуса окружности. Отметим это свойство интеграла (14), мы о нём ещё не раз вспомним.