4) Интегрирования гиперболических функций проводится аналогично интегрированию тригонометрических функций на основе формул:

$$ch^2x - sh^2x = 1,\ shx \cdot chx = \frac{1}{2}sh2x,\ ch^2x = \frac{1}{2}(ch2x+1),\ sh^2x = \frac{1}{2}(ch2x-1).$$

1.4. Интегрирование некоторых иррациональных функций

1) Интеграл от рациональной функции, аргументами которой являются независимая переменная x и **дробно-линейная функция** $\frac{ax+b}{cx+d}$ в рациональных степенях, сводится к интегралу от рациональной функции $R(t)$ с помощью подстановки $t^k = \frac{ax+b}{cx+d}$, где число $k \in N$ равно наименьшему общему кратному знаменателей всех рациональных степеней дробно-линейной функции.

Пример. Найти интеграл $\int \frac{dx}{(\sqrt[4]{x+3}-1)\sqrt{x+3}}$.

Так как наименьшее общее кратное чисел четыре и два равно четырем, то производим подстановку $x+3=t^4$. Тогда $dx = 4t^3dt$ и, переходя к новой переменной t, получим:

$$\int \frac{dx}{(\sqrt[4]{x+3}-1)\sqrt{x+3}} = 4\int \frac{t^3dt}{(t-1)t^2} = 4\int \frac{tdt}{(t-1)} = 4\int \frac{(t-1)+1}{(t-1)}dt =$$

$$= 4(t + \ln|t-1|) + C = 4(\sqrt[4]{x+3} + \ln|\sqrt[4]{x+3}-1|) + C.$$

2) Интегралы от квадратичных иррациональностей вида $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$ путем выделения полного квадрата $ax^2+bx+c = a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a^2}\right)$ и подстановки $u = x + \frac{b}{2a}$ сводятся к интегралу одного из следующих трех типов: $\int R(u, \sqrt{l^2-u^2})du$, $\int R(u, \sqrt{l^2+u^2})du$, $\int R(u, \sqrt{u^2-l^2})du$. Последние интегралы соответствующими тригонометрическими подстановками $u = l\sin t$, $u = l\cdot tgt$, $u = l/\cos t$ приводят к рациональным интегралам вида $\int R(\sin t, \cos t)dt$, которые берутся по рассмотренным ранее схемам.

Пример. Найти интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+4x+7)^3}}$.

Выделяя полный квадрат $x^2+4x+7=(x+2)^2+3$ и делая подстановку $u = x+2$, получим $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+4x+7)^3}} = \int \frac{du}{\sqrt{(u^2+3)^3}}$.

Далее производится тригонометрическая подстановка $u=\sqrt{3}\cdot tgt$, вычисляется дифференциал $du = \frac{\sqrt{3}}{\cos^2 x}dt$ и убирается радикал $\sqrt{(u^2+3)} = \sqrt{3}/\cos t$. Продолжаем вычисление интеграла, переходя от переменной u к переменной t:

$$\int \frac{du}{\sqrt{(u^2+3)^3}} = \int \frac{\sqrt{3}\cos^3 t}{3\sqrt{3}\cos^2 t}dt = \frac{1}{3}\int \cos t\, dt = \frac{1}{3}\sin t + C.$$

Для того чтобы получить неопределенный интеграл в исходной переменной x, необходимо в полученной первообразной $\frac{1}{3}\sin t$ произвести обратные замены. Окончательно, $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+4x+7)^3}} = \frac{1}{3}\sin t + C = \frac{1}{3}\frac{u}{\sqrt{u^2+3}} + C = \frac{1}{3}\frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+7}} + C$.

Интегралы вида $\int \frac{dx}{(mx+n)^r\sqrt{ax^2+bx+c}}, (r=1,2)$ сводятся к рассмотренным выше интегралам с помощью подстановки $mx+n=1/t$.

Пример. Найти интеграл $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-2x-1}}$. Полагаем $x=1/t$. Тогда $\sqrt{x^2-2x-1} = \sqrt{1/t^2-2/t-1} = \sqrt{1-2t-t^2}\,/t$, $dx = (-1/t^2)dt$, и, окончательно, получим:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-2x-1}} = -\int \frac{dt}{t^2\cdot\frac{1}{t}\cdot\frac{\sqrt{1-2t-t^2}}{t}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{2-(t+1)^2}} = -\arcsin\frac{t+1}{\sqrt{2}} + C = -\arcsin\frac{x+1}{x\sqrt{2}} + C.$$

3) Интегралы от дифференциального бинома вида $\int x^m\cdot(a+bx^n)^p dx$, где коэффициенты a, b есть вещественные числа, а m, n, p есть рациональные дроби.

Как показал русский математик П. Л. Чебышев, интегралы этого вида «берутся» (выражаются через элементарные функции) только тогда, когда хотя бы одно из чисел p, $\frac{m+1}{n}$, $\frac{m+1}{n}+p$ является целым.

В каждом из трех случаев, для того чтобы привести интеграл от дифференциального бинома к интегралу от рациональной дроби, выбирается соответствующая подстановка:

1) Если целым является число p, то необходима подстановка $x=t^k$, где степень k равна наименьшему общему кратному знаменателей дробей m и n;

2) Если целым числом является дробь $\frac{m+1}{n}$, то необходима подстановка $a+bx^n=t^s$, где степень s равна знаменателю дроби p;

3) Если целым числом является дробь $\frac{m+1}{n}+p$, то необходима подстановка $a+bx^n=x^n\cdot t^s$, где степень s равна знаменателю дроби p.

Пример. Найти интеграл $\int\frac{\sqrt[3]{\sqrt[4]{x}+1}}{\sqrt{x}}dx$.

Приведем наш интеграл к стандартному виду интеграла от дифференциального бинома $\int\frac{\sqrt[3]{\sqrt[4]{x}+1}}{\sqrt{x}}dx=\int x^{-1/2}(1+x^{1/4})^{1/3}dx$. Здесь: $m=-\frac{1}{2}$, $n=\frac{1}{4}$, $p=\frac{1}{3}$, $\frac{m+1}{n}=2$. Данный интеграл относится ко второму варианту и необходима подстановка $1+x^{1/4}=t^3$. Тогда $x=(t^3-1)^4$, $dx=4(t^3-1)^3\cdot 3t^2dt$, $t=(1+x^{1/4})^{1/3}$. Отсюда:

$$\int\frac{\sqrt[3]{\sqrt[4]{x}+1}}{\sqrt{x}}dx=\int x^{-1/2}(1+x^{1/4})^{1/3}dx=\int\frac{t}{(t^3-1)^2}\cdot 12t^2(t^3-1)^3dt=12\int(t^6-t^3)dt=$$

$$=\frac{12t^7}{7}-3t^4+C=\frac{12}{7}(\sqrt[4]{x}+1)^{7/3}-3(\sqrt[4]{x}+1)^{4/3}+C.$$