1.5. Интегрирование тригонометрических и гиперболических функций.

1) Интегралы вида $\int \sin^m x \cos^n x \, dx$.

Если хотя бы одно из чисел m или n является нечетным числом, то, отделяя от нечетной степени один сомножитель и выражая с помощью формулы $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ оставшуюся четную степень через дополнительную функцию, приходим к табличному интегралу.

Пример. Найти интеграл $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[4]{\cos x}} dx$.

$$\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[4]{\cos x}} dx = \int \frac{\sin^2 x}{\sqrt[4]{\cos x}} \sin x dx = -\int \frac{1-\cos^2 x}{\sqrt[4]{\cos x}} d(\cos x) = -\int \frac{d(\cos x)}{\sqrt[4]{\cos x}} + \int \frac{\cos^2 x}{\sqrt[4]{\cos x}} d(\cos x) =$$

$$= -\frac{4}{3}\sqrt[4]{\cos^3 x} + \frac{4}{11}\sqrt[4]{\cos^{11} x} + C.$$

Если m и n являются четными числами, то степени понижаются путем перехода к двойному аргументу с помощью следующих формул:

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}, \quad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \quad \sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x.$$

Пример. Найти интеграл $\int \sin^2 x \cos^4 x \, dx$.

$$\int \sin^2 x \cos^4 x \, dx = \int (\sin x \cdot \cos x)^2 \cos^2 x \, dx = \int \frac{\sin^2 2x}{4} \cdot \frac{1+\cos 2x}{2} dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int \sin^2 2x dx + \frac{1}{8}\int \sin^2 2x \cos 2x dx = \frac{1}{8}\int \frac{1-\cos 4x}{2} dx + \frac{1}{16}\int \sin^2 2x d(\sin 2x) = \frac{x}{16} - \frac{\sin 4x}{64} + \frac{\sin^3 2x}{48} + C.$$

Если $m + n = -2k,\ k \in N$, т.е. $m+n$ является целым, четным, отрицательным числом, то целесообразно использовать подстановки $tg\, x = t$ или $ctg\, x = t$.

Пример. Найти интеграл $\int \sin^{1/3} x \cos^{-13/3} x \, dx$.

Так как $1/3 - 13/3 = -4$, то вычисление интеграла сводится к интегрированию степеней тангенса: $\int \sin^{1/3} x \cos^{-13/3} x \, dx = \int tg^{1/3} x \frac{dx}{\cos^4 x} = \int tg^{1/3} x (1 + tg^2 x) \frac{dx}{\cos^2 x} =$

$$= \int tg^{1/3} x d(tgx) + \int tg^{7/3} x d(tgx) = \frac{3}{4} tg^{4/3} x + \frac{3}{10} tg^{10/3} x + C$$

Для вычисления интегралов вида $\int tg^n x dx$, $\int ctg^n x dx$ при $n > 1$ используются тригонометрические формулы $tg^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$, $ctg^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} - 1$.

Пример. Найти интеграл $\int ctg^4 x\, dx$.

$$\int ctg^4 x\, dx = \int ctg^2 x \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1 \right) dx = -\int ctg^2 x d(ctg\, x) - \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1 \right) dx =$$

$$= -\int ctg^2 x d(ctg\, x) + \int d(ctg\, x) + \int dx = -ctg^3 x / 3 + ctg\, x + x + C.$$

В общем случае интегралы вида $\int \sin^m x \cos^n x\, dx$, где m, n - целые числа, вычисляются с помощью рекуррентных формул, которые выводятся методом интегрирования по частям.

Пример. Вывести **рекуррентную формулу для интеграла** $I_{2k+1} = \int \frac{dx}{\cos^{2k+1} x}$, зависящего от параметра $k \in N$, и с помощью этой формулы найти интеграл данного типа $\int \frac{dx}{\cos^3 x}$.

$$I_{2k+1} = \int \frac{dx}{\cos^{2k+1} x} = \int \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x)dx}{\cos^{2k+1} x} = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^{2k+1} x} dx + \int \frac{dx}{\cos^{2k-1} x} = \int \sin x \frac{\sin x}{\cos^{2k+1} x} dx + I_{2k-1}.$$

Полагаем $u = \sin x$, $dv = \frac{\sin x}{\cos^{2k+1} x} dx$. Тогда $du = \cos x dx$, $v = \frac{1}{2k \cdot \cos^{2k} x}$.

Применяя к полученному интегралу формулу интегрирования по частям, находим: $I_{2k+1} = \frac{\sin x}{2k \cdot \cos^{2k} x} - \frac{1}{2k} \int \frac{dx}{\cos^{2k-1} x} + I_{2k-1} = \frac{\sin x}{2k \cdot \cos^{2k} x} + \left(1 - \frac{1}{2k} \right) I_{2k-1}$.

Таким образом, рекуррентная формула выведена, и мы можем, пользуясь этой формулой, найти интеграл данного типа при $k = 1$ в следующем виде:

$$I_3 = \int \frac{dx}{\cos^3 x} dx = \frac{\sin x}{2 \cdot \cos^2 x} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\cos x} = \frac{\sin x}{2 \cdot \cos^2 x} + \frac{1}{2} \ln \left| tg \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C$$

2) Для интегрирования произведений синусов и косинусов различных аргументов применяются следующие тригонометрические формулы:

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)),$$

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)),$$

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)).$$

Пример. Найти интеграл $\int\cos 9x\cos 5x\,dx$.

Применяя первую из рекомендуемых тригонометрических формул, получим:

$$\int\cos 9x\cos 5x\,dx=\frac{1}{2}\int(\cos 4x+\cos 14x)dx=\frac{1}{8}\sin 4x+\frac{1}{28}\sin 14x+C.$$

3) Интегралы вида $\int R(\sin x,\cos x)dx$, где $R(u,v)$ есть рациональная функция двух переменных, приводятся к интегралам от рациональной функции нового аргумента t подстановкой $tg\frac{x}{2}=t$. При этом используются формулы:

$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2},\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\ dx=\frac{2dt}{1+t^2}.$$

Пример. Найти интеграл $\int\frac{dx}{4\cos x+3\sin x+5}$. Полагаем $tg\frac{x}{2}=t$. Тогда

$$\int\frac{dx}{4\cos x+3\sin x+5}=2\int\frac{dt}{\left(4\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}+3\cdot\frac{2t}{1+t^2}+5\right)(1+t^2)}=2\int\frac{dt}{t^2+6t+9}=$$

$$=2\int\frac{dt}{(t+3)^2}=-\frac{2}{t+3}+C=-\frac{2}{tg(x/2)+3}+C.$$

Если под интегралом функции $\sin x$ и $\cos x$ содержатся только в четных степенях, то удобнее использовать подстановку $tgx=t$.

Пример. Найти интеграл $\int\frac{dx}{1-5\sin^2 x}$. Разделив числитель и знаменатель на функцию $\cos^2 x$ и используя подстановку $tgx=t$, получим:

$$\int\frac{dx}{1-5\sin^2 x}=\int\frac{dx/\cos^2 x}{(1-5\sin^2 x)/\cos^2 x}=\int\frac{d(tgx)}{1+tg^2x-5tg^2x}=\int\frac{dt}{1-4t^2}=$$

$$=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+2t}{1-2t}\right|+C=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+2tgx}{1-2tgx}\right|+C.$$