Интегрирование по частям

Теорема 10.3. *Если функции u, v дифференцируемы на промежутке X и существует первообразная для $u'v$ на X, то существует первообразная для uv' на X и имеет место формула интегрирования по частям*

$$\int u(x)v'(x)dx = uv - \int u'(x)v(x)dx.$$

Доказательство. Так как

$$(u(x)v(x))' = u(x)v'(x) + u'(x)v(x),$$

то

$$u(x)v'(x) = (u(x)v(x))' - u'(x)v(x).$$

Первообразная правой части этого равенства существует, следовательно, существует первообразная для левой части $u(x)v'(x)$.

Формула интегрирования по частям следует из равенства

$$\int u(x)v'(x)dx = \int [(u(x)v(x))' - u'(x)v(x)]dx =$$
$$= \int (u(x)v(x))'dx - \int u'(x)v(x)dx =$$
$$= u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx. \ \square$$

Учитывая равенства $du = u'(x)dx$, $dv = v'(x)dx$, формулу интегрирования по частям можно записать в виде

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

Пример 10.2.

$$\int x\sin x dx = \Big[u = x;\ dv = \sin x\,dx;\ v = -\cos x\Big] =$$
$$= -x\cos x + \int \cos x\,dx = -x\cos x + \sin x + C.$$