Метод математической индукции

Метод математической индукции – это удобный и эффективный инструмент в случае, когда необходимо доказать утверждения T_n, зависящие от натурального параметра $n \in \mathbb{N}$. Состоит он в следующем.

Обозначим A множество всех натуральных чисел, при которых утверждения T_n истинны.

На первом шаге, называемом *база индукции* (Б. И.), показывают, что множество A не пусто, т. е. что хотя бы при каком-то n_0 утверждение T_{n_0} истинно.

На втором шаге (его называют *шаг индукции*, Ш. И.) из того, что утверждение T_n верно при $n = k$, доказывают, что оно верно при $n = k + 1$, т. е. показывают, что

$$k \in A \ \Rightarrow \ k + 1 \in A.$$

На последнем шаге, называемом *заключение индукции* (З. И.), делают вывод, что серия утверждений T_n верна при всех $n \geqslant n_0$.

Действительно, если утверждение T_{n_0} верно, то, по доказанному на шаге индукции, следует, что утверждение T_{n_0+1} тоже верно. Поскольку T_{n_0+1} верно, то верно и T_{n_0+2}, и т. д.

Пример 1. Докажем неравенство Бернулли. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – числа одного знака и все больше -1. Тогда для любого натурального n

$$(1 + x_1)(1 + x_2) \ldots (1 + x_n) \geqslant 1 + x_1 + x_2 + \ldots + x_n. \tag{1}$$

1. Б. И. Возьмем $n = 1$. Тогда в левой части получится один множитель – $1 + x_1$, а в правой – два слагаемых: $1 + x_1$. То есть имеет место равенство

$$1 + x_1 = 1 + x_1.$$

2. Ш. И. Пусть верно неравенство

$$(1 + x_1)(1 + x_2) \ldots (1 + x_k) \geqslant 1 + x_1 + x_2 + \ldots + x_k. \tag{2}$$

Покажем, что тогда неравенство

$$(1 + x_1)(1 + x_2) \ldots (1 + x_k)(1 + x_{k+1}) \geqslant 1 + x_1 + x_2 + \ldots + x_k + x_{k+1} \tag{3}$$

также верно.

Умножим обе части неравенства (2) на $(1 + x_{k+1}) > 0$:

$$\begin{aligned}(1 + x_1)(1 + x_2) \ldots (1 + x_k)(1 + x_{k+1}) &\geqslant \\ (1 + x_1 + x_2 + \ldots + x_k)(1 + x_{k+1}) &= \\ = 1 + x_1 + x_2 + \ldots + x_k + x_{k+1} + x_1x_{k+1} + x_2x_{k+1} + \ldots + x_kx_{k+1}.\end{aligned}$$

Последние k слагаемых справа неотрицательны, поскольку все числа x_i одного знака. Отбрасывая их, получим неравенство (3).

3. З. И. Неравенство (1) верно при любом $n \in \mathbb{N}$.

Домашнее задание. Доказать формулу *бинома Ньютона*:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}, \qquad a, b \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N},$$

где $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ и $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$. По определению полагают $0! := 1$, $C_n^{-1} := 0$, $C_n^{n+1} := 0$.