Функции комплексного переменного

Множества и области

Определение 5. Точка a называется

внутренней точкой множества D, если она лежит в этом множестве с некоторой своей ε-окрестностью;

внешней точкой множества D, если она с некоторой своей ε-окрестностью лежит в дополнении множества D;

граничной точкой множества D, если в любой её окрестности присутствуют точки как из множества D, так и из его дополнения.

Совокупность всех граничных точек множества D называется *границей* множества D и обозначается ∂D. Граница множества D по умолчанию считается *ориентированной положительно* (относительно множества D), что означает, что при движении вдоль ∂D в направлении роста параметра множество D остаётся слева.

Определение 6. Множество D называется

открытым, если любая его точка – внутренняя;

связным, если любые две точки множества D можно соединить кривой, целиком лежащей в D.

Областью называется связное открытое множество.

Область с присоединённой к ней границей называется *замкнутой областью*; обозначается $\overline{G}$: $\overline{G} = G \cup \partial G$.

Область G комплексной плоскости называется *односвязной*, если любая замкнутая кривая, лежащая в G, ограничивает только точки множества G.[7]

Область G расширенной комплексной плоскости называется *односвязной*, если любую замкнутую кривую, лежащую в G, можно непрерывно деформировать в точку, оставаясь в области G; если при этом деформация проходит через бесконечно удалённую точку, то её нужно рассматривать на сфере Римана.

Определение функции комплексного переменного

Определение 7. Пусть каждой точке z множества D (расширенной) комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ поставлено в соответствие комплексное (быть может, бесконечное) число w. В этом случае говорят, что на множестве D определена *функция комплексного переменного* и обозначают $w = f(z)$, $z \in D$.

Если при таком отображении каждому $z \in D$ соответствует только одно число w, то функция f называется *однозначной*.

Множество значений E однозначной функции f есть совокупность всех w вида $w = f(z)$, $z \in D$.

Определение 8. Однозначная функция $w = f(z)$ называется *однолистной* на множестве D, если в разных точках множества D она принимает разные значения:

$$\forall\, z_1, z_2 \in D, \quad z_1 \neq z_2 \quad \Rightarrow \quad w_1 = f(z_1) \neq w_2 = f(z_2).$$

[7] Другое определение: если любую замкнутую кривую, лежащую в G, можно непрерывно деформировать в точку, оставаясь в области G.

При однолистном отображении множества D на множество E каждой точке $z \in D$ поставлена в соответствие единственная точка $w \in E$ и каждая точка $w \in E$ имеет только один прообраз $z \in D$. Т.е. однолистная функция осуществляет *взаимно-однозначное отображение* между множествами D и E.

Это, в свою очередь, означает, что на множестве E определена *обратная функция* $z = f^{-1}(w)$:

$$z = f^{-1}(f(z)), \quad z \in D, \qquad w = f(f^{-1}(w)), \quad w \in E.$$

Если $w = f(z)$ отображает D на E однолистным образом, и функция $\zeta = g(w)$ однолистно отображает E на G, то суперпозиция $\zeta = h(z) = g(f(z))$ отображает D на G однолистным образом.

Для удобства исследования функции, у неё выделяют действительную и мнимую части. Пусть функция f ставит в соответствие комплексному числу $z = x + iy$ комплексное число $w = u + iv$. Изменяя z (т.е. меняя x и y), мы получим соответствующие значения w (т.е. соответствующие значения u и v). Тем самым определяются две функции

$$u = u(x;y) \quad \text{и} \quad v = v(x;y),$$

а комплекснозначную функцию $w = f(z)$ можно записать в виде

$$f(z) = u(x;y) + iv(x;y).$$

Функции $u(x;y)$ и $v(x;y)$ определены на соответствующем множестве $\widetilde{D}$ действительной плоскости $\mathbb{R}^2$ и называются *действительной* и *мнимой частями функции* f:

$$\operatorname{Re} f(z) = u(x;y), \qquad \operatorname{Im} f(z) = v(x;y).$$

Далее по умолчанию рассматриваются однозначные функции. При рассмотрении многозначных функций это будет оговорено специально.

Предел функции и непрерывность

Пусть функция $f(z)$ определена на множестве D и z_0 – предельная точка[8] множества D ($z_0 \in D'$).

Определение 9. Комплексное число a называется *пределом функции* $f(z)$ *в точке* z_0, если

(определение Гейне) $\forall \{z_n\} \subset D,\ z_n \neq z_0,\ z_n \to z_0 \ \Rightarrow\ f(z_n) \to a;$

(определение Коши) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_\varepsilon > 0 \quad \forall z \in D,\ 0 < |z - z_0| < \delta_\varepsilon \ \Rightarrow\ |f(z) - a| < \varepsilon.$

Это обозначают

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = a \qquad \text{или} \qquad f(z) \to a \ \text{ при } z \to z_0.$$

- Определения Коши и Гейне эквивалентны.

[8]Точка z_0 называется *предельной* точкой множества D, если любая её проколотая окрестность содержит хотя бы одну точку множества D.