7. Предел функции

7.1. Понятие функции

Определение 7.1. Соответствие f между элементами множеств X и Y называется *функцией*, если любому элементу $x \in X$ поставлен в соответствие единственный элемент $y \in Y$. Это обозначается следующим образом:

$$f\,:\,X \to Y \qquad \text{или} \qquad y = f(x),\ x \in X.$$

Приняты следующие определения и обозначения:

$X = \mathcal{D}(f)$ – *область определения* функции f;

Y – *область значений*;

$f(X) = E(f)$ – *полный образ множества* X при отображении f;

x – *прообраз элемента* y при данном соответствии $y = f(x)$;

y – *образ элемента* x;

$f^{-1}(y) = \{x \in X \,:\, f(x) = y\}$ – *полный прообраз элемента* y.

Соответствия, задаваемые функцией, удобно изображать в виде графика

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)), x \in X\}\,.$$

В курсе математического анализа в основном рассматриваются числовые функции, т. е. такие, что $X, Y \subset \mathbb{R}$.

Определение 7.2. Пусть даны две функции:

$$f\,:\,X \to Y \quad \text{и} \quad g\,:\,Y \to Z.$$

Функция $h:\ X \to Z$, определяемая равенством $h(x) = g(f(x))$, называется *сложной функцией от* f *и* g (или *суперпозицией функций* f *и* g).

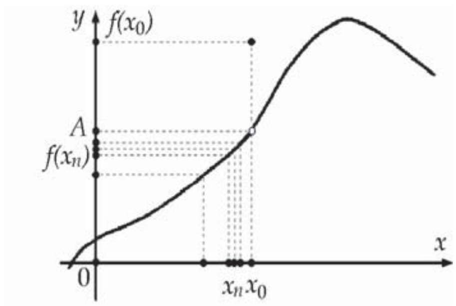
Определение 7.3. Если для любого $y \in Y$ множество $f^{-1}(y)$ состоит из одного элемента, то соответствие $y \mapsto f^{-1}(y)$, определенное на Y, будет функцией, которая называется *обратной к функции* f и обозначается

$$f^{-1} : Y \to X \quad \text{или} \quad x = f^{-1}(y).$$

7.2. Определение предела функции в точке

Пусть функция f определена в каждой точке интервала (a, b), кроме, быть может, точки $x_0 \in (a, b)$.

Определение 7.4 (определение предела по Гейне[10]). Число A называется *пределом функции f при стремлении x к x_0*, если для любой последовательности $\{x_n\}$ такой, что $\{x_n\} \subset (a, b)$, $x_n \neq x_0$, $x_n \to x_0$, $n \to \infty$, последовательность $f(x_n)$ значений функции f сходится к A при $n \to \infty$:



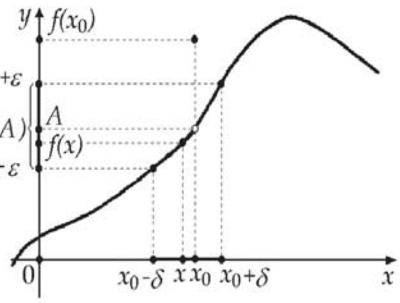
В этом случае пишут

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A.$$

[10] *Генрих Эдуард Гейне* (1821–1881) – немецкий математик. Основные труды относятся к теории множеств, математической физике, теории функций и дифференциальных уравнений.

Определение 7.5 (определение предела по Коши[11]). Число A называется *пределом функции f при $x \to x_0$*, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0 \quad \forall x \in (a, b) \quad (0 < |x - x_0| < \delta) \Rightarrow (|f(x) - A| < \varepsilon).$$



Теорема 7.1. *Определения предела функции по Гейне и по Коши эквивалентны.*

Доказательство. Докажем, что из определения по Гейне следует определение по Коши. Проведем доказательство методом от противного.

Пусть $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ по Гейне, но не по Коши, т. е.

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall \delta(\varepsilon) > 0 \quad \exists x_\delta \in (a, b) \quad (0 < |x_\delta - x_0| < \delta \wedge |f(x_\delta) - A| \geqslant \varepsilon).$$

[11] *Огюстен Луи Коши* (1789–1857) – великий французский математик и механик. Один из основоположников теории аналитических функций и создателей математического анализа. Основные труды по теории дифференциальных уравнений, математической физике, теории чисел, геометрии. Автор классических курсов математического анализа.

Пусть $\delta = \frac{1}{n}$. Тогда найдутся $x_n \in (a, b)$ такие, что

$$0 < |x_n - x_0| < \frac{1}{n}, \quad |f(x_n) - A| \geqslant \varepsilon.$$

Отсюда $x_n \neq x_0$, $x_n \to x_0$, но $f(x_n) \nrightarrow A$, что противоречит тому, что $f(x_n) \to A$ по Гейне.

Теперь докажем, что из определения предела по Коши следует определение предела по Гейне.

Пусть $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ по Коши. Возьмем любую последовательность $\{x_n\} \subset (a, b)$, $x_n \to x_0$, $x_n \neq x_0$. Возьмем любое $\varepsilon > 0$. Тогда из определения предела по Коши найдется $\delta > 0$, для которого, в силу сходимости $x_n \to x_0$, найдется номер N такой, что $|x_n - x_0| < \delta$ при $n > N$. Тогда из определения предела по Коши следует, что $|f(x_n) - A| < \varepsilon$, что означает, что $f(x_n) \to A$, т. е. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ в смысле определения Гейне. $\square$

Односторонние пределы

Определение 7.6. Пусть функция f определена на интервале (a, x_0). Число A называется *пределом функции f слева в точке* x_0,

$$A = \lim_{x \to x_0 - 0} f(x),$$

если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in (a, x_0) \quad (x_0 - \delta < x < x_0) \Rightarrow (|f(x) - A| < \varepsilon).$$

Предел функции f справа определяется аналогично.

Ясно, что функция f имеет предел в точке x_0 тогда и только тогда, когда в этой точке для функции f существуют пределы слева и справа и они равны.

Если $x_0 = +\infty$, то $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$ определяется следующим образом:
по Коши:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta(\varepsilon) > 0 \quad \forall\, x > \delta(\varepsilon) \;\Rightarrow\; |f(x) - A| < \varepsilon;$$

по Гейне:

$$\forall\, x_n \to +\infty \Rightarrow \quad f(x_n) \to A \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

7.3. Свойства предела функции

Арифметические свойства предела функции

Пусть функции f и g определены на интервале (a, b), кроме, быть может, точки x_0. Если существуют пределы $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$, то существуют пределы суммы, произведения и отношения этих функций и имеют место равенства:

1) $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x) + g(x)] = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) + \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$;

2) $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = (\lim\limits_{x\to x_0} f(x)) \cdot (\lim\limits_{x\to x_0} g(x))$;

3) $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$, при условии $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) \neq 0$.

Эти свойства вытекают из соответствующих свойств сходящихся последовательностей и определения предела функции по Гейне.

Ограниченность функции

Определение 7.7. Функция f называется *ограниченной на множестве* X, если множество ее значений $Y = \{f(x) |\ x \in X\}$ ограничено, т. е.

$$\exists\, m, M \in \mathbb{R}\ \ \forall\, x \in X\ \ m \leqslant f(x) \leqslant M.$$

Если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, *то существует проколотая окрестность точки* x_0*:*

$$\check{O}(x_0) = (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta),$$

в которой функция f *ограничена.*

Действительно, из существования предела следует, что для $\varepsilon = 1$ существует $\delta > 0$ такое, что $|f(x) - A| < 1$ при всех $x \in \check{O}_\delta(x_0)$. Отсюда

$$\exists\, M = 1 + |A| > 0 \quad \exists\, \check{O}_\delta(x_0) \quad \forall\, x \in \check{O}_\delta(x_0) \quad |f(x)| \leqslant M.$$

□

Отделимость от нуля

Если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A > 0$, *то найдется такая окрестность* $\check{O}(x_0)$, *что* $f(x) > \frac{A}{2} > 0$ *при всех* $x \in \check{O}(x_0)$.

Действительно, возьмем $\varepsilon = \frac{A}{2} > 0$, тогда из существования конечного предела следует, что существует $\check{O}(x_0)$ такая, что при всех $x \in \check{O}(x_0)$

$$A - \frac{A}{2} < f(x) < A + \frac{A}{2}, \quad \text{т. е.} \quad f(x) > \frac{A}{2} > 0. \qquad \square$$

Свойства, связанные с неравенствами

1. *Если* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$ *и* $\forall\, x \in \check{O}(x_0)$ *выполняется неравенство* $f(x) \leqslant g(x)$, *то* $A \leqslant B$.

2. *Если* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = A$ *и* $\forall\, x \in \check{O}(x_0)$ *выполняются неравенства* $f(x) \leqslant h(x) \leqslant g(x)$, *то* $\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = A$.

Доказательство этих свойств следует из соответствующих свойств для сходящихся последовательностей и определения предела функции по Гейне.

7.4. Бесконечно малые и бесконечно большие функции

Определение 7.8. Функция α называется *бесконечно малой функцией при* $x \to x_0$, если $\alpha(x) \to 0$ при $x \to x_0$.

Определение 7.9. Функция γ называется *бесконечно большой функцией при* $x \to x_0$, если

$$\lim_{x\to x_0} \gamma(x) = \infty$$

или, в развернутой форме,

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta(\varepsilon) > 0 \quad \forall\, x \in \check{O}_\delta(x_0) \;\Rightarrow\; |\gamma(x)| > \varepsilon.$$

Теорема 7.2.

1. *Если* α *и* β *– бесконечно малые функции при* $x \to x_0$, *то* $\alpha + \beta$ *– также бесконечно малая функция при* $x \to x_0$.