15.4. Частные производные и дифференциалы высших порядков

Пусть функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ имеет частную производную $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ (она называется частной производной первого порядка) в некоторой окрестности некоторой точки M. Если функция $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ имеет в точке M частную производную по аргументу x_k, то такая производная называется *частной производной второго порядка* функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ по аргументам x_i, x_k в точке M и обозначается одним из следующих символов:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i}(M), \quad f_{x_i x_k}(M).$$

Если $k \neq i$, то частная производная второго порядка называется *смешанной*. Если $k = i$, то частная производная второго порядка обозначается

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \text{ или } f_{x_i^2}.$$

Пусть функция $f(x, y)$ независимых переменных x и y дифференцируема в окрестности точки (x_0, y_0) и дважды дифференцируема в точке (x_0, y_0). Тогда первый дифференциал функции

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dy$$

является функцией четырех переменных: x, y, dx, dy, а производные $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ и $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ – дифференцируемыми в точке (x_0, y_0) функциями.

Дифференциал второго порядка функции $f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ определяется как дифференциал в этой точке от первого дифференциала df при следующих условиях:

1) df рассматривается как функция двух независимых переменных — x и y;

2) при вычислении дифференциалов от функций $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ и $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ приращения независимых переменных x и y берутся равными dx и dy.

На основании этого определения получается формула

$$d^2 f(M_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M_0)dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(M_0)dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(M_0)dy^2.$$

Если переменные x и y не независимые, а являются, в свою очередь, функциями, например, двух переменных: $x = x(t_1, \ldots, t_m)$ и $y = y(t_1, \ldots, t_m)$, которые имеют дифференциалы второго порядка в точке $(t_1^0, \ldots, t_m^0)$, и $x_0 = x(t_1^0, \ldots, t_m^0)$, $y_0 = y(t_1^0, \ldots, t_m^0)$, $M_0(x_0, y_0)$, то

$$d^2 f(M_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M_0)dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(M_0)dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(M_0)dy^2 + \\ + \frac{\partial f}{\partial x}(M_0)d^2 x + \frac{\partial f}{\partial y}(M_0)d^2 y.$$

Заметим, что в общем случае смешанные производные одного порядка по одним и тем же переменным, но взятые в различных порядках, не совпадают. Однако имеет место следующая теорема.

Теорема 15.4. *Пусть функция $f(x, y)$ определена в $O((x_0, y_0))$ и в этой окрестности существуют $f''_{xy}(x, y)$ и $f''_{yx}(x, y)$, которые непрерывны в точке (x_0, y_0). Тогда $f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть

$$\Delta_x f = f(x_0 + \Delta x, y) - f(x_0, y) = \psi(y);$$
$$\Delta_y f = f(x, y_0 + \Delta y) - f(x, y_0) = \varphi(x).$$

Тогда

$$\begin{aligned}\Delta_y(\Delta_x f) &= \psi(y_0 + \Delta y) - \psi(y_0) = \\ &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y) - \\ &\qquad - f(x_0 + \Delta x, y_0) + f(x_0, y_0);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta_x(\Delta_y f) &= \varphi(x_0 + \Delta x) - \varphi(x_0) = \\ &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0) - \\ &\qquad - f(x_0, y_0 + \Delta y) + f(x_0, y_0).\end{aligned}$$

Заметим, что $\Delta_y(\Delta_x f) = \Delta_x(\Delta_y f)$. Используя формулу Лагранжа, получим

$$\begin{aligned}&\Delta_y(\Delta_x f) = \psi(y_0 + \Delta y) - \psi(y_0) = \psi'_y(y_0 + \theta_1 \Delta y)\Delta y = \\ &= [f'_y(x_0 + \Delta x, y_0 + \theta_1 \Delta y) - f'_y(x_0, y_0 + \theta_1 \Delta y)]\Delta y = \\ &= f''_{yx}(x_0 + \theta_2 \Delta x, y_0 + \theta_1 \Delta y)\Delta y \Delta x,\end{aligned}$$

где $0 < \theta_1 < 1$, $0 < \theta_2 < 1$;

$$\begin{aligned}&\Delta_x(\Delta_y f) = \varphi(x_0 + \Delta x) - \varphi(x_0) = \varphi'_x(x_0 + \theta_3 \Delta x) = \\ &= [f'_x(x_0 + \theta_3 \Delta x, y_0 + \Delta y) - f'_x(x_0 + \theta_3 \Delta x, y_0)]\Delta x = \\ &= [f''_{xy}(x_0 + \theta_3 \Delta x, y_0 + \theta_4 \Delta y)]\Delta x \Delta y,\end{aligned}$$

где $0 < \theta_3 < 1$, $0 < \theta_4 < 1$, т. е.

$$f''_{yx}(x_0 + \theta_2 \Delta x, y_0 + \theta_1 \Delta y) = f''_{xy}(x_0 + \theta_3 \Delta x, y_0 + \theta_4 \Delta y).$$

В силу того, что $0 < \theta_i < 1$, а f''_{xy} и f''_{yx} непрерывны в точке (x_0, y_0), при $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0$ получаем

$$f''_{yx}(x_0, y_0) = f''_{xy}(x_0, y_0). \qquad \square$$

Теорема 15.5 (формула Тейлора)**.** *Пусть функция $f(x)$ определена в $O(x^0)$, где $O(x^0) \subset \mathbb{R}^n$, и имеет в этой окрестности дифференциалы до $(k+1)$-го порядка включительно. Тогда справедлива формула Тейлора:*

$$\begin{aligned} f(x) = \;& f(x_0) + df(x^0) + \frac{1}{2!}d^2 f(x^0) + \ldots + \frac{1}{k!}d^k f(x^0) + \\ &+ \frac{1}{(k+1)!}d^{k+1} f(x^0 + \theta(x - x^0)), \quad 0 < \theta < 1, \end{aligned}$$

где $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in O(x^0)$, $dx_i = \Delta x_i = x_i - x_i^0$.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$\varphi(t) = f(x^0 + t(x - x^0)), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \quad x \in O(x^0).$$

Функция $\varphi(t)$ дифференцируема на $[0, 1]$ до $(k+1)$-го порядка включительно, причем $\varphi^{(p)}(t) = d^p f(x^0 + t(x - x^0))$, где $\Delta x_i = dx_i$. Для функции $\varphi(t)$ можно записать формулу Тейлора по степеням t с остатком в форме Лагранжа при $t = 1$:

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(0) + \frac{\varphi''(0)}{2!} + \ldots + \frac{1}{k!}\varphi^{(k)}(0) + \frac{1}{(k+1)!}\varphi^{(k+1)}(\theta),$$

где $0 < \theta < 1$, а тогда (учитывая вид $\varphi^{(p)}(t)$ при $t = 0$)

$$f(x) = f(x^0) + df(x^0) + \ldots + \frac{d^k f(x^0)}{k!} + \frac{d^{k+1} f(x^0 + \theta(x - x^0))}{(k+1)!},$$

причем во всех дифференциалах dx_i берутся равными $\Delta x_i = x_i - x_i^0$. $\square$