Вычеты и интегралы

Вычет в изолированной особой точке z_0 есть, по определению, значение интеграла

$$\text{Выч}\, f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma f(z)\, dz$$

по замкнутому контуру γ, проведённому вокруг точки z_0. Однако на это равенство можно смотреть и как на возможность вычисления интеграла при помощи вычета подынтегральной функции в особой точке:

$$\oint_\gamma f(z)\, dz = 2\pi i \text{Выч}\, f(z_0).$$

Если контур γ содержит внутри не одну, а несколько изолированных особых точек функции аналитической $f(z)$, то такой интеграл также может быть вычислен при помощи вычетов.

Теорема 21 (Основная теорема о вычетах). *Пусть функция $f(z)$ – аналитическая в области G за исключением конечного числа особых точек $z_1, z_2, \ldots, z_n$, и пусть она непрерывна в $\overline{G}$. Тогда*

$$\oint_{\partial G} f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \text{Выч}\, f(z_k).$$

Доказательство. Проведём вокруг каждой особой точки z_k замкнутый контур γ_k, лежащий в области G и окружающий только одну особую точку – z_k. Рассмотрим область G' с границей $\partial G' = \partial G \cup \gamma_1^- \cup \gamma_2^- \cup \ldots \cup \gamma_n^-$; она является многосвязной. По теореме Коши для многосвязной области

$$\int_{\partial G'} f(z)\, dz = 0.$$

Отсюда

$$\oint_{\partial G} f(z)\, dz + \sum_{k=1}^{n} \oint_{\gamma_k^-} f(z)\, dz = 0$$

или

$$\oint_{\partial G} f(z)\, dz = \sum_{k=1}^{n} \oint_{\gamma_k^+} f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \text{Выч}\, f(z_k). \qquad \square$$

Можно соединить теоремы о вычислении интегралов по замкнутому контуру от аналитической функции (интегральную теорему Коши и основную теорему о вычетах) в одно утверждение:

Пусть функция $f(z)$ – аналитическая в области G за исключением, быть может, конечного числа особых точек. Тогда для любого замкнутого контура $\gamma \subset G$, не проходящего через особые точки,

$$\oint_\gamma f(z)\, dz = \begin{cases} 2\pi i \sum \text{Выч}\, f(z_k) & \textit{по всем } z_k\textit{, лежащим внутри контура } \gamma, \\ 0, & \textit{если внутри } \gamma \textit{ нет особых точек.} \end{cases}$$

Ряд Лорана в бесконечно удалённой точке

Пусть функция $f(z)$ – аналитическая в области $R < |z| < \infty$. Эта область есть проколотая окрестность бесконечно удалённой точки. Согласно теореме Лорана, функция однозначно представима в этой области степенным рядом

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_{-n}}{z^n} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n.$$

Первую сумму называют *правильной частью* ряда Лорана *в окрестности бесконечно удалённой точки*; эти слагаемые не имеют особенности в области $R < |z| < \infty$: они все бесконечно малые, кроме нулевого слагаемого, которое является постоянным.

Вторую сумму называют *главной частью* ряда Лорана: все её слагаемые бесконечно большие при $z \to \infty$. Именно эта часть ряда характеризует особую точку $z = \infty$, и эта характеристика такая же, как и в случае конечной точки z_0:

- $z = \infty$ является устранимой особой точкой, если главная часть ряда Лорана не содержит ни одного слагаемого;
- $z = \infty$ является полюсом, если главная часть ряда Лорана содержит конечное число слагаемых, причём это полюс k-го порядка, если $c_k \neq 0$ и $c_n = 0$ при $n > k$;
- $z = \infty$ является существенно особой точкой, если главная часть ряда Лорана содержит бесконечное число слагаемых.

Ряд Лорана в окрестности бесконечно удалённой точки можно рассматривать как ряд по степеням $\frac{1}{z}$. При таком подходе разделение ряда на главную и правильную части совпадает с разделением в случае конечной особой точки.

Вычетом функции $f(z)$ в бесконечно удалённой точке называется число

$$\text{Выч}\, f(\infty) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma^-} f(z)\, dz,$$

где γ – произвольный замкнутый контур, проведённый вокруг точки $z = 0$ и лежащий в кольце $R < |z| < \infty$.

Это определение совпадает с определением вычета в конечной точке, поскольку γ служит замкнутым контуром, проведённым вокруг точки $z = \infty$, и при этом обход этой точки является положительным.

Однако в терминах коэффициентов ряда Лорана формула вычета отличается от случая конечной точки:

$$\text{Выч}\, f(\infty) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma^-} f(z)\, dz = -c_{-1},$$

и это коэффициент слагаемого из правильной части ряда Лорана.

Отсюда следует, что даже в случае, когда $z = \infty$ не является особой точкой, вычет в ней может оказаться не нулевым.

В ряде случаев есть простые формулы для нахождения вычеты в бесконечно удалённой точке:

- если $f(z) \sim \frac{A}{z}$ при $z \to \infty$, то $\text{Выч}\, f(\infty) = -A$;
- если $f(z) \sim \frac{A}{z^k}$ при $z \to \infty$, то $\text{Выч}\, f(\infty) = 0$.

Вычеты во всех особых точках аналитической функции есть величина постоянная, а именно

Теорема 22 (Теорема о сумме вычетов)**.** *Пусть функция* $f(z)$ *– аналитическая во всей комплексной плоскости, за исключением конечного числа особых точек* $z_1, z_2, \ldots, z_n$*. Тогда*

$$\sum_{k=1}^{n} \text{Выч}\, f(z_k) + \text{Выч}\, f(\infty) = 0. \tag{27}$$

Доказательство. Проведём замкнутый контур γ, окружающий все конечные особые точки $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Тогда, по основной теореме о вычетах,

$$\oint_{\gamma} f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \text{Выч}\, f(z_k).$$

С другой стороны

$$\oint_{\gamma^-} f(z)\, dz = 2\pi i\, \text{Выч}\, f(\infty).$$

Отсюда получаем равенство (27). □

Список литературы

[1] Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного / СПб. : Лань, 2002. 688 с.

[2] Свешников А. Г., Тихонов А. Н. Теория функций комплексной переменной / М.: Наука, 1967. 304 с.

[3] Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ, часть I /

[4] Сидоров Ю. В., Федорюк М. В., Шабунин М. И. Лекции по ТФКП / М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. 480 с.

[5] Маркушевич А. И. Краткий курс теории аналитических функций /