Теорема 9 (Интегральная формула Коши). *Пусть функция $f(z)$ – аналитическая в односвязной области G. Тогда для любого замкнутого контура $\gamma \subset G$ и для любой точки z_0, лежащей внутри контура,*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz.$$

Доказательство. Проведём внутри контура γ окружность C_ρ с центром в точке z_0 радиуса ρ: В силу интегральной теоремы Коши

$$\int_{\gamma \cup C_\rho^-} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = 0,$$

следовательно,

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = \int_{C_\rho} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz.$$

Рассмотрим интеграл по окружности:

$$\begin{aligned}
\int_{C_\rho} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz &= \int_{C_\rho} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\, dz + \int_{C_\rho} \frac{f(z_0)}{z - z_0}\, dz = \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + \rho e^{i\varphi}) - f(z_0)}{\rho e^{i\varphi}}\, \rho i e^{i\varphi}\, d\varphi + f(z_0) \int_0^{2\pi} \frac{\rho i e^{i\varphi}}{\rho e^{i\varphi}}\, d\varphi = \\
&= i \int_0^{2\pi} \big(f(z_0 + \rho e^{i\varphi}) - f(z_0)\big)\, d\varphi + 2\pi i f(z_0).
\end{aligned}$$

Интеграл в правой части может быть сделан сколь угодно малым по абсолютной величине за счёт выбора радиуса окружности и непрерывности функции $f(z)$:

$$\left| i \int_0^{2\pi} \big(f(z_0 + \rho e^{i\varphi}) - f(z_0)\big)\, d\varphi \right| \leqslant 2\pi \max_\varphi \big|f(z_0 + \rho e^{i\varphi}) - f(z_0)\big| < \varepsilon.$$

В равенстве

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = i \int_0^{2\pi} \big(f(z_0 + \rho e^{i\varphi}) - f(z_0)\big)\, d\varphi + 2\pi i f(z_0)$$

левая часть и второе слагаемое в правой части не зависят от ρ, а значит и интеграл в правой части от него не зависит, следовательно, он равен нулю, и мы получаем требуемое равенство. □

Замечание 1. Если функция $f(z)$ – аналитическая в односвязной области G, ограниченной контуром Γ, непрерывна в $\overline{G}$, то

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz, \quad z_0 \in G.$$

Замечание 2. Если функция $f(z)$ является аналитической в многосвязной области G и непрерывной в $\overline{G}$, то интегральная формула Коши остаётся верной при интегрировании по границе области G:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial G} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz, \quad z_0 \in G,$$

или по любой кривой, ограничивающей только точки области G.

Следствие 8 (Формула среднего значения)**.** *Если $f(z)$ – аналитическая в односвязной области G функция, то*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi\rho} \oint_{C_\rho} f(z)\, dl = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + \rho e^{i\varphi})\, d\varphi, \quad z_0 \in G,$$

где C_ρ – окружность с центром в точке z_0 радиуса ρ, лежащая внутри G.

Формула среднего значения показывает, что значение аналитической функции в некоторой точке есть среднее её значений на окружности, проведённой вокруг этой точки.

Как следствие интегральной формулы Коши, получим следующую характеристику аналитических функций.

Теорема 10 (Принцип максимума модуля аналитической функции)**.** *Пусть $f(z)$ – аналитическая в односвязной области G, непрерывна в $\overline{G}$. Тогда модуль функции $f(z)$ либо является величиной постоянной в $\overline{G}$, либо достигает максимума на границе области.*

Доказательство см. в [2].

Следствие 1. *Если в добавление к условиям теоремы функция $f(z)$ не равна нулю в $\overline{G}$, то справедлив принцип минимума модуля: модуль функции $f(z)$ либо является величиной постоянной в $\overline{G}$, либо достигает минимума на границе области.*

Доказательство. При условии $f(z) \neq 0$ функция $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ удовлетворяет условиям теоремы. Остаётся сказать, что максимум модуля функции $g(z)$ совпадает с минимумом модуля функции $f(z)$. □

Следствие 2. *Если функция аналитическая $f(z)$ постоянна по абсолютной величине в односвязной области G, то она постоянна в этой области.*

Доказательство. Если $|f(z)| = R(x; y) \equiv const$, то в силу условий Коши-Римана (8) аргумент этой функции есть также величина постоянная. Следовательно, функция принимает постоянные значения. □

Интегралы, зависящие от параметра

Теорема 11. *Пусть в комплексной плоскости заданы область G и кривая γ, расположенные друг относительно друга произвольным образом. Пусть функция $f(z;\zeta)$ определена на $G \times \gamma$ и удовлетворяет следующим условиям:*

1) при любом фиксированном $\zeta \in \gamma$ функция $f(z;\zeta)$ как функция переменной z является аналитической в G;

2) функции $f(z;\zeta)$ и $\dfrac{\partial f(z;\zeta)}{\partial z}$ непрерывны в $G \times \gamma$ как функции двух переменных.
Тогда

$$F(z) = \int_\gamma f(z;\zeta)\, d\zeta, \quad z \in G,$$

является аналитической функцией в области G и

$$F'(z) = \int_\gamma \frac{\partial f(z;\zeta)}{\partial z}\, d\zeta, \quad z \in G.$$

Доказательство. Представим функцию $F(z)$ в виде суммы двух криволинейных интегралов:

$$F(z) = \int_\gamma u(x;y;\xi;\eta)\,d\xi - v(x;y;\xi;\eta)\,d\eta + i\int_\gamma v(x;y;\xi;\eta)\,d\xi + u(x;y;\xi;\eta)\,d\eta = U(x;y) + iV(x;y).$$

Применим к каждому из них теорему математического анализа о возможности дифференцирования интеграла, зависящего от параметра[17]:

> **Теорема.** (См., например, [?, ?].) *Если функция $\varphi(x;t)$ вместе со своей производной $\frac{\partial\varphi(x;t)}{\partial x}$ непрерывна по совокупности переменных на множестве $[a;b]\times[\alpha;\beta]$, то в каждой точке интервала $(a;b)$*
>
> $$\frac{d}{dx}\int_\alpha^\beta \varphi(x;t)\,dt = \int_\alpha^\beta \frac{\partial\varphi(x;t)}{\partial x}\,dt.$$

Получим:

$$\frac{\partial U(x;y)}{\partial x} = \int_\gamma \frac{\partial u}{\partial x}\,d\xi - \frac{\partial v}{\partial x}\,d\eta, \qquad \frac{\partial U(x;y)}{\partial y} = \int_\gamma \frac{\partial u}{\partial y}\,d\xi - \frac{\partial v}{\partial y}\,d\eta,$$

$$\frac{\partial V(x;y)}{\partial y} = \int_\gamma \frac{\partial v}{\partial y}\,d\xi + \frac{\partial u}{\partial y}\,d\eta, \qquad \frac{\partial V(x;y)}{\partial x} = \int_\gamma \frac{\partial v}{\partial x}\,d\xi + \frac{\partial u}{\partial x}\,d\eta.$$

Из условий Коши-Римана для функции $f(z)$ получаем выполнение этих условий для функции $F(z)$.

Кроме того, в силу теоремы математического анализа о непрерывности интеграла, зависящего от параметра:

> **Теорема.** (См., например, [?, ?].) *Если функция $\varphi(x;t)$ непрерывна по совокупности переменных на множестве $[a;b]\times[\alpha;\beta]$, то интеграл*
>
> $$\int_\alpha^\beta \varphi(x;t)\,dt$$
>
> *является непрерывной функцией на отрезке $[a;b]$.*

функции $\frac{\partial U(x;y)}{\partial x}$, $\frac{\partial U(x;y)}{\partial y}$, $\frac{\partial V(x;y)}{\partial x}$, $\frac{\partial V(x;y)}{\partial y}$ непрерывны по совокупности переменных в области G. Следовательно, функция $F(z)$ является аналитической в области G.

Найдём её производную:

$$\begin{aligned} F'(z) &= \frac{\partial U(x;y)}{\partial x} + i\frac{\partial V(x;y)}{\partial x} = \int_\gamma \frac{\partial u}{\partial x}\,d\xi - \frac{\partial v}{\partial x}\,d\eta + i\int_\gamma \frac{\partial v}{\partial x}\,d\xi + \frac{\partial u}{\partial x}\,d\eta = \\ &= \int_\gamma \Big(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\Big)\,d\xi + i\int_\gamma \Big(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\Big)\,d\eta = \int_\gamma \Big(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\Big)\,(d\xi + i\,d\eta) = \\ &= \int_\gamma \frac{\partial f(z;\zeta)}{\partial z}\,d\zeta. \end{aligned}$$

□

[17] Убедитесь в возможности применения этой теоремы.

Бесконечная дифференцируемость аналитических функций

На основе доказанной теоремы и интегральной формулы Коши мы получим одно из ключевых свойств функций комплексного переменного. Мы покажем, что *аналитическая функция бесконечно дифференцируема.*

Пусть функция $f(z)$ – аналитическая в области G, непрерывна в $\overline{G}$. Тогда по интегральной формуле Коши для любого $z \in G$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma=\partial G} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta.$$

Зафиксируем точку z и проведём вокруг неё на расстоянии не менее $d > 0$ кривую $\gamma \subset G$. Обозначим G' точки, окружённые контуром γ – односвязную область. Рассмотрим подынтегральную функцию $\varphi_1(z;\zeta) = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ на множестве $G' \times \Gamma$. Очевидно, она удовлетворяет всем условиям предыдущей теоремы, поэтому

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial z} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\, d\zeta.$$

Рассмотрим на множестве $G' \times \Gamma$ функцию $\varphi_2(z;\zeta) = \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}$. Она также удовлетворяет всем условиям предыдущей теоремы, поэтому

$$f''(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial z} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\, d\zeta = \frac{2!}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^3}\, d\zeta.$$

Продолжая последовательно применять теорему 11, в произвольной точке $z \in G$ получим

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta, \qquad n \in \mathbb{N}_0. \qquad \square$$

Теорема 12 (Теорема Лиувилля)**.** *Пусть функция $f(z)$ – аналитическая во всей комплексной плоскости. Если она ограничена в $\mathbb{C}$, то она является постоянной.*

Доказательство. В силу аналитичности функция $f(z)$ имеет первую производную во всей плоскости, выражаемую интегралом Коши. Тогда для любой точки $z \in \mathbb{C}$ и окружности C_R с центром в этой точке

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\, d\zeta.$$

Из ограниченности функции: $|f(z)| \leqslant M$, получаем оценку

$$|f'(z)| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|f(z + Re^{i\varphi})|}{R^2}\, R d\varphi \leqslant \frac{M}{R},$$

которая показывает, что производная $f'(z)$ может быть сделана сколь угодно малой по абсолютной величине выбором радиуса окружности, что возможно лишь в случае равенства её нулю. Из произвольности точки z заключаем, что $|f'(z)| \equiv 0$ в $\mathbb{C}$, следовательно, $f'(z) \equiv 0$ и $f(z) \equiv const$ в $\mathbb{C}$. $\square$

Определение 17. Функция, аналитическая во всей комплексной плоскости, называется *целой.*

Таким образом, теорема Лиувилля устанавливает, что *целая функция не может быть ограниченной в $\mathbb{C}$, не будучи постоянной.*

Следующая теорема устанавливает достаточные условия аналитичности и является обратной к интегральной теореме Коши.

Теорема 13 (Теорема Морера)**.** *Пусть функция $f(z)$ непрерывна в односвязной области G и пусть для любого замкнутого контура $\gamma \subset G$*

$$\oint_\gamma f(z)\,dz = 0.$$

Тогда $f(z)$ – аналитическая в G.

Доказательство. При данных условиях (согласно теореме 8) функция $f(z)$ имеет аналитическую первообразную в области G

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,d\zeta.$$

Как теперь известно, аналитическая функция бесконечно дифференцируема, следовательно, функция $F(z)$ имеет непрерывную вторую производную

$$F''(z) = f'(z), \quad z \in G,$$

что по определению означает аналитичность функции $f(z)$ в G. $\square$

З а м е ч а н и е. Теорему Морера можно обобщить на многосвязные области следующим образом: *если функция непрерывна в области G и интеграл от неё по любому замкнутому контуру, ограничивающему только точки области, равен нулю, то эта функция аналитична в G.*