получаем:

$$
\begin{aligned}
\int_\Gamma f(z)\,dz &= \int_{\smile{AB}} u(x;y)\,dx - v(x;y)\,dy + i\int_{\smile{AB}} v(x;y)\,dx + u(x;y)\,dy = \\
&= \int_\alpha^\beta \big(u(x(t);y(t))x'(t) - v(x(t);y(t))y'(t)\big)\,dt + i\int_\alpha^\beta \big(v(x(t);y(t))x'(t) + u(x(t);y(t))y'(t)\big)\,dt = \\
&= \int_\alpha^\beta \big(u(x(t);y(t)) + iv(x(t);y(t))\big)x'(t)\,dt + i\int_\alpha^\beta \big(u(x(t);y(t)) + iv(x(t);y(t))\big)y'(t)\,dt = \\
&= \int_\alpha^\beta \big(u(x(t);y(t)) + iv(x(t);y(t))\big)\big(x'(t) + iy'(t)\big)\,dt = \int_\alpha^\beta f(\sigma(t))\sigma'(t)\,dt. \qquad (13)
\end{aligned}
$$

Пример 5. Вычислим интеграл

$$\oint_{C_\rho} \frac{dz}{z - z_0}, \qquad (14)$$

где C_ρ – окружность с центром в точке z_0 радиуса ρ. Параметризуем её следующим образом:

$$C_\rho: \ z = z_0 + \rho e^{i\varphi}, \quad \varphi \in [0; 2\pi].$$

Тогда по формуле (13)

$$\oint_{C_\rho} \frac{dz}{z - z_0} = \int_0^{2\pi} \frac{\rho i e^{i\varphi}\,d\varphi}{\rho e^{i\varphi}} = \int_0^{2\pi} i\,d\varphi = 2\pi i.$$

Мы получили интересный результат: интеграл по окружности, проведённой вокруг точки z_0, от функции $\frac{1}{z-z_0}$ не зависит от радиуса окружности. Отметим это свойство интеграла (14), мы о нём ещё не раз вспомним.

Интегралы от аналитических функций

Мы переходим к исследованию свойств интегралов от аналитических функций. Они являются важной составляющей теории аналитических функций, выявляют некоторые ключевые свойства этих функций и имеют разнообразные следствия во многих областях математики, физики.

Интегральная теорема Коши и её следствия

Теорема 7 (интегральная теорема Коши)**.** *Пусть функция $f(z)$ – аналитическая в односвязной области G. Тогда интеграл от неё по любому замкнутому контуру, лежащему в G, равен нулю.*

Доказательство. Пусть γ – замкнутый контур в области G. Тогда

$$\oint_\gamma f(z)\,dz = \oint_\gamma u(x;y)\,dx - v(x;y)\,dy + i\oint_\gamma v(x;y)\,dx + u(x;y)\,dy.$$

Функции $u(x;y)$ и $v(x;y)$, как действительная и мнимая части аналитической функции, имеют непрерывные производные в области G, а следовательно и в замкнутой области $\overline{D}$, ограниченной кривой γ. Поэтому мы можем применить формулу Грина:

$$\oint_\gamma f(z)\,dz = \int_{\overline{D}} \left(-\frac{\partial v(x;y)}{\partial x} - \frac{\partial u(x;y)}{\partial y}\right) dxdy + i\int_{\overline{D}} \left(\frac{\partial u(x;y)}{\partial x} - \frac{\partial v(x;y)}{\partial y}\right) dxdy.$$

В силу условий Коши-Римана подынтегральные выражения равны нулю, что завершает доказательство теоремы. □

Следствие 4. *Если функция $f(z)$ – аналитическая в односвязной области G, ограниченной контуром Γ, непрерывна в $\overline{G}$, то $\oint_\Gamma f(z)\,dz = 0$.*

Доказательство см., например, в [1] гл. I §4 п. 12.

Следствие 5. *Пусть функция $f(z)$ – аналитическая в многосвязной области G, непрерывна в $\overline{G}$. Пусть граница ∂G области составлена из внешнего контура Γ и нескольких внутренних контуров $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$: $\partial\Gamma = \Gamma^+ \cup \gamma_1^- \cup \ldots \cup \gamma_n^-$. Тогда $\oint_{\partial G} f(z)\,dz = 0$.*

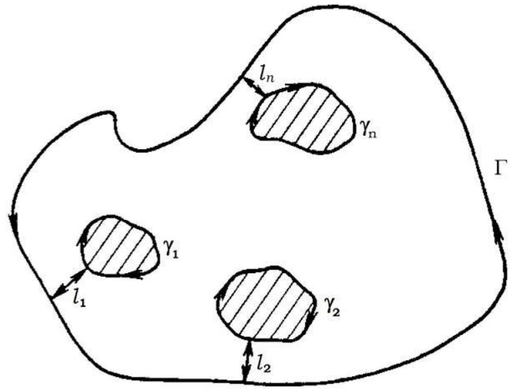
Доказательство. Соединим каждый внутренний контур γ_k с внешней границей кусочно-гладкой кривой l_k и рассмотрим замкнутый контур $C = \Gamma \cup l_1 \cup \gamma_1^- \cup l_1^- \cup \ldots \cup l_n \cup \gamma_n^- \cup l_n^-$, где кривые l_k пробегаются дважды в противоположных направлениях. Контур C служит границей односвязной области G', и в силу предыдущего следствия интеграл по нему равен нулю. Тогда

$$0 = \oint_C f(z)\,dz = \oint_{\partial G} f(z)\,dz + \oint_{l_1} f(z)\,dz + \oint_{l_1^-} f(z)\,dz + \ldots \oint_{l_n} f(z)\,dz + \oint_{l_n^-} f(z)\,dz = \oint_{\partial G} f(z)\,dz.$$

□

Очевидным следствием теоремы является следующее

Следствие 6. *Если $f(z)$ – аналитическая в односвязной области G, то для любых точек $z_1, z_2 \in G$ интеграл $\int_{\smile{z_1 z_2}} f(z)\,dz$ не зависит от кривой, соединяющей эти точки.*



Независимость интеграла $\int_{\overset{\smile}{z_1 z_2}} f(z)\,dz$ от кривой, соединяющей точки z_1 и z_2, позволяет рассматривать его как однозначную функцию точек z_1 и z_2. Если зафиксировать одну из точек, а второй позволить произвольно меняться в области G, то интеграл определит однозначную функцию комплексной переменной, определённую в области G:

$$F(z) = \int_{\overset{\smile}{z_0 z}} f(\zeta)\,d\zeta = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,d\zeta, \tag{15}$$

здесь z_0 – фиксированная, а z – произвольная точки области G. Как и в случае функций действительной переменной, будем называть её *интегралом с переменным верхним пределом.*

Итак, мы получили

Следствие 7. *Если $f(z)$ – аналитическая в односвязной области G функция, то интеграл с переменным верхним пределом от $f(z)$ является однозначной функцией в области G.*

Следует заметить, что требование аналитичности функции $f(z)$ для определения интеграла с переменным верхним пределом является чрезмерным[15]. Достаточно потребовать, чтобы функция $f(z)$ была непрерывна в односвязной области G и чтобы интеграл от неё по любому замкнутому контуру, лежащему в G, был равен нулю. Тогда функция (15) также определена и является однозначной в области G.

Для функций действительной переменной интеграл с переменным верхним пределом играл роль первообразной подынтегральной функции в случае непрерывности последней. Покажем, что это свойство сохраняется и для функций комплексного переменного.

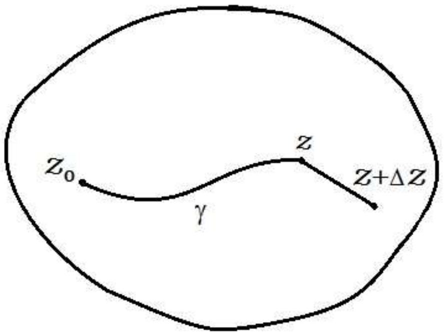
Теорема 8. *Пусть функция $f(z)$ непрерывна в односвязной области G и пусть $\oint_\gamma f(z)\,dz = 0$ для любого замкнутого контура $\gamma \subset G$. Тогда функция (15) является аналитической в области G и $F'(z) = f(z)$.*

Доказательство. Будем доказывать равенство $F'(z) = f(z)$ по определению. Рассмотрим

$$\frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} = \frac{1}{\Delta z}\left(\int_{z_0}^{z+\Delta z} f(\zeta)\,d\zeta - \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,d\zeta\right).$$

В силу независимости интеграла от кривой, соединяющей точки, будем считать первый интеграл по кривой $\gamma \cup [z; z+\Delta z]$, где γ – кривая, по которой вычисляется второй интеграл, а $[z; z+\Delta z]$ – отрезок прямой:

[15] На первый взгляд. См. далее теорему Морера



Тогда

$$\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}=\frac{1}{\Delta z}\int_z^{z+\Delta z} f(\zeta)\,d\zeta.$$

Пользуясь тем, что

$$\int_z^{z+\Delta z} 1\,d\zeta=\Delta z,$$

преобразуем

$$\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}-f(z)=\frac{1}{\Delta z}\left(\int_z^{z+\Delta z} f(\zeta)\,d\zeta-f(z)\int_z^{z+\Delta z} 1\,d\zeta\right)=\frac{1}{\Delta z}\int_z^{z+\Delta z}\big(f(\zeta)-f(z)\big)\,d\zeta.$$

Оценим модуль этой разности:

$$\Big|\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}-f(z)\Big|\leqslant\frac{1}{|\Delta z|}\Big|\int_z^{z+\Delta z}\big(f(\zeta)-f(z)\big)\,d\zeta\Big|\leqslant\frac{1}{|\Delta z|}\max_{\zeta}|f(\zeta)-f(z)|\cdot|\Delta z|$$

В силу непрерывности функции $f(z)$ её изменение на отрезке $[z;z+\Delta z]$ при достаточно малом $|\Delta z|$ меньше любого наперёд взятого $\varepsilon>0$, следовательно

$$\Big|\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}-f(z)\Big|<\varepsilon,$$

что доказывает равенство

$$F'(z)=f(z),\quad z\in G.$$

Отсюда следует аналитичность функции $F(z)$ в области G, поскольку её производная является непрерывной функцией. $\square$

Определение 16. Аналитическая функция $\Phi(z)$ называется *первообразной* функции $f(z)$ в области G, если $\Phi'(z)=f(z)$, $z\in G$.

Первообразные обладают следующими свойствами.

1. Две первообразные одной функции отличаются друг от друга не более чем на константу.

   Действительно, пусть $\Phi_1(z)$ и $\Phi_2(z)$ – первообразные функции $f(z)$ на односвязной области G. Тогда для функции

   $$F(z)=\Phi_1(z)-\Phi_2(z)=U(x;y)+iV(x;y)$$

   имеем

   $$F'(z)=0=\frac{\partial U}{\partial x}+i\frac{\partial V}{\partial x}=\frac{\partial V}{\partial y}-i\frac{\partial U}{\partial y}.$$

   Откуда следует, что частные производные функций $U(x;y)$ и $V(x;y)$ равны нулю, т.е. эти функции не зависят ни от x, ни от y. Следоваетельно, функция $F(z)\equiv const.$ $\square$

2. Формула Ньютона-Лейбница.

   Пусть $\Phi(z)$ – первообразная функции $f(z)$ в односвязной области G, и пусть одна из первообразных функции $f(z)$ выражается интегралом с переменным верхним пределом[16]. Тогда $\Phi(z)$ отличается от интеграла с переменным верхним пределом не более чем на постоянную величину:

$$\Phi(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\, d\zeta + \mathrm{C}.$$

   В силу независимости интеграла от кривой,

$$\int_{z_1}^{z_2} f(\zeta)\, d\zeta = \int_{z_0}^{z_2} f(\zeta)\, d\zeta - \int_{z_0}^{z_1} f(\zeta)\, d\zeta = \Phi(z_2) - \Phi(z_1). \qquad \square$$

Пример 6. Рассмотрим функцию $f(z) = \frac{1}{z}$. Она является аналитической во всей комплексной плоскости за исключением нуля. Следовательно, интегрируема по любой кривой, не проходящей через ноль.

Рассмотрим односвязную область $G = \{z : \ -\pi < \arg z < \pi\}$ – комплексная плоскость с разрезом по отрицательной действительной полуоси. Согласно вышеизложенному, в ней определена однозначная аналитическая функция

$$F(z) = \int_{1}^{z} \frac{d\zeta}{\zeta}. \tag{16}$$

В частности, интегрируя по отрезку действительной оси, получаем известную функцию

$$F(x) = \int_{1}^{x} \frac{d\zeta}{\zeta} = \ln x, \quad x > 0.$$

Поэтому функцию, определённую равенством (16), рассматривают как продолжение натурального логарифма в комплексную плоскость и сохраняют за ней соответствующее обозначение

$$\ln z = \int_{1}^{z} \frac{d\zeta}{\zeta}, \quad z \in G.$$

Функция (16) в двусвязной области $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ не является однозначной, поскольку

$$\oint_{|z|=1} \frac{d\zeta}{\zeta} = 2\pi i,$$

т.е. при n-кратном обходе вокруг нуля $\ln z$ приобретёт добавку $2\pi n i$. Эту многозначную функцию обозначают $\operatorname{Ln} z$:

$$\operatorname{Ln} z = \int_{1}^{z} \frac{d\zeta}{\zeta} = \ln z + 2\pi n i, \quad z \neq 0, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Иногда это равенство принимают за определение логарифмической функции в комплексной плоскости. Натуральный логарифм, определяемый таким образом, совпадает с натуральным логарифмом, определённым как функция, обратная к экспоненте.

[16]Например, $f(z)$ удовлетворяет условиям теоремы 8 или является аналитической в G.