Аналитические функции

По-прежнему, если это не оговорено специально, мы имеем дело с однозначной функцией $w = f(z)$.

Определение 13. Функция $f(z)$ называется *аналитической в области* G, если она обладает непрерывной производной в этой области.

Необходимым и достаточным условием аналитичности функции $f(z)$ в области $G \subseteq \mathbb{C}$ является непрерывность частных производных функций $u(x;y)$ и $v(x;y)$ в соответствующей области $\widetilde{G} \subseteq \mathbb{R}^2$.

Данное определение аналитической функции отличается от общепринятого дополнительным требованием непрерывности производной. Это сделано для упрощения изложения. Такое ограничение не является принципиальным с точки зрения математики, поскольку далее будет доказано, что аналитическая в некоторой области функция является бесконечно дифференцируемой в этой области. Полное изложение теории аналитических функций можно найти в обширной литературе.

Некоторые замечания по поводу аналитических функций

1. `Операции над аналитическими функциями.`

Сумма и *произведение* аналитических функций в области G суть функции, аналитические в G.

Отношение аналитических функций является аналитической функцией, если знаменатель не обращается в ноль.

Суперпозиция аналитических функций является аналитической функцией: если $w = f(z)$ – функция, аналитическая в области G, и $z = \phi(\zeta)$ – аналитическая из области Ω в G, то сложная функция $w = F(\zeta) := f(\phi(\zeta))$ аналитична в Ω.[11]

2. `Существование обратной функции.`

Пусть на множестве D определена функция $w = f(z)$ и пусть E – множество всех её значений. Это означает, что каждому $w \in E$ соответствует одно или несколько чисел $z \in D$, таких, что $f(z) = w$. Тем самым на множестве E оказывается задана функция, которая каждому $w \in E$ ставит в соответствие одно или несколько чисел $z \in D$ – решений уравнения

$$w = f(z). \tag{9}$$

Эту функцию, переводящую E в D (однозначную или многозначную), называют *обратной* к функции $w = f(z)$ и обозначают $z = f^{-1}(w)$.

По определению обратной функции, справедливо тождество

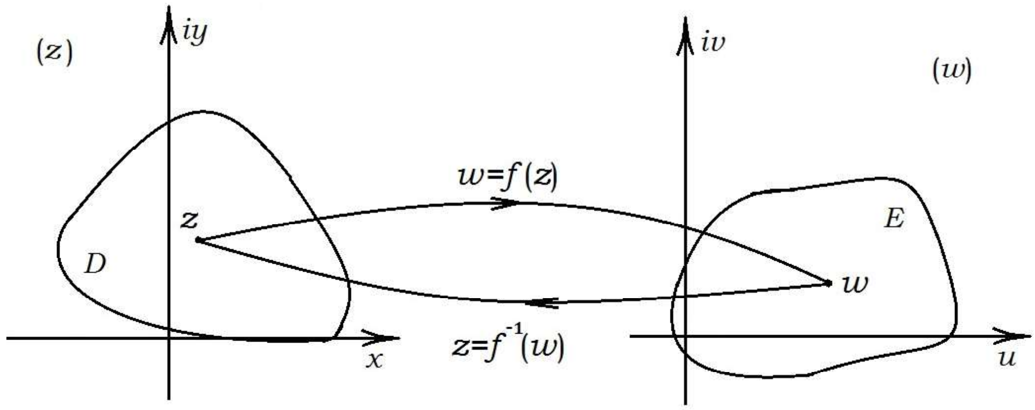
$$f(f^{-1}(w)) \equiv w, \quad w \in E.$$

Обратное тождество

$$f^{-1}(f(z)) \equiv z, \quad z \in D,$$

имеет место лишь при условии однозначности обратной функции $f^{-1}(w)$ (или однолистности прямой функции $f(z)$).

[11] Подумайте, как бы вы это доказали?



Теорема 6. *Пусть функция $w = f(z)$ – аналитическая в некоторой окрестности точки z_0 и $f'(z_0) \neq 0$. Тогда в некоторой окрестности $B_\varepsilon(w_0)$ точки w_0 определена функция $z = f^{-1}(w)$, взаимно-однозначно отображающая $B_\varepsilon(w_0)$ на $B_\delta(z_0)$, обратная к функции $w = f(z)$ и аналитическая, причём*

$$\left(f^{-1}(w)\right)' = \frac{1}{f'(z)}, \qquad w \in B_\varepsilon(w_0), \quad z \in B_\delta(z_0).$$

Доказательство. Уравнение, задающее функцию комплексного переменного, равносильно системе уравнений для действительной и мнимой частей

$$w = f(z) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} u = u(x;y) \\ v = v(x;y) \end{cases} \tag{10}$$

поэтому вопрос о существовании и свойствах обратной функции сводится к вопросу о разрешимости данной системы и свойствам её решений.

Согласно теореме о существовании функций, задаваемых системой уравнений, если функции системы (10) непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности точки $(x_0; y_0; u_0; v_0)$, обращаются в верные равенства в точке $(x_0; y_0; u_0; v_0)$, а якобиан этой системы $\frac{D(u,v)}{D(x,y)}$ не равен нулю в точке $(x_0; y_0; u_0; v_0)$, то найдутся такие окрестности $B(z_0)$ и $B(w_0)$ точек $(x_0; y_0)$ и $(u_0; v_0)$ соответственно, что для любой точки $(u; v) \in B(w_0)$ найдётся единственное решение системы (10)

$$x = x(u;v), \quad y = y(u;v), \qquad (x;y) \in B(z_0),$$

причём функции $x(u;v)$ и $y(u;v)$ непрерывно дифференцируемы в $B(w_0)$ и $x(u_0;v_0) = x_0$ и $y(u_0;v_0) = y_0$.

Аналитичность функции $f(z)$ подразумевает непрерывную дифференцируемость действительной и мнимой частей функции $f(z)$. Из условий Коши-Римана получаем

$$\frac{D(u,v)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix} = u'_x \cdot v'_y - u'_y \cdot v'_x = (u'_x)^2 + (v'_x)^2 = |f'(z_0)|^2 \neq 0.$$

Таким образом, выполнены все условия теоремы о существовании, единственности и дифференцируемости решений системы (10) и тем самым определена обратная функция

$$z = x + iy = x(u;v) + iy(u;v) = f^{-1}(w), \quad w \in B(w_0).$$

Найдём её производную:

$$\left(f^{-1}\right)'(w) = \lim_{\Delta w\to 0}\frac{f^{-1}(w+\Delta w)-f^{-1}(w)}{\Delta w} = \left[\begin{array}{c} f^{-1}(w)=z,\ f^{-1}(w+\Delta w)=z' \\ \Delta w = f(z')-f(z)\end{array}\right] =$$
$$= \lim_{z'\to z}\frac{z'-z}{f(z')-f(z)} = \lim_{z'\to z}\frac{1}{\frac{f(z')-f(z)}{z'-z}} = \frac{1}{f'(z)}. \qquad \square$$

3. `Восстановление аналитической функции по её действительной или мнимой части.` *По заданной действительной или мнимой части аналитической функции можно восстановить всю функцию с точностью до константы.*

Пусть известна функция $u(x;y)$ – действительная часть некоторой аналитической функции $f(z)$. Используя условия Коши-Римана (6), выпишем дифференциал её мнимой части – функции $v(x;y)$:

$$dv(x;y) = -\frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy.$$

Отсюда функция $v(x;y)$ восстанавливается с точностью до произвольной постоянной, а вместе с ней и функция $f(z)$.

Таким же образом можно поступать, если известна $\operatorname{Im} f(z) = v(x;y)$.

Функция u (или v) может быть задана как функция переменных r и φ. В этом случае для нахождения аналитической функции $f(z)$ следует использовать уравнения Коши-Римана в форме (8).

Пример 2. Пусть $v(x;y) = y\cos y \operatorname{sh} x + x\sin y \operatorname{ch} x$. Из уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = -y\cos y\operatorname{ch} x - \sin y\operatorname{ch} x - x\sin y\operatorname{sh} x$$

находим функцию $u(x;y)$ с точностью до неизвестной функции переменной x:

$$\begin{aligned} u(x;y) = &- \int (y\cos y\operatorname{ch} x + \sin y\operatorname{ch} x + x\sin y\operatorname{sh} x)\,dy = \\ &= -\,(y\sin y + \cos y)\operatorname{ch} x + \cos y\operatorname{ch} x + x\cos y\operatorname{sh} x + C(x) = \\ &= -\,y\sin y\operatorname{ch} x + x\cos y\operatorname{sh} x + C(x). \end{aligned}$$

Из второго уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= -\,y\sin y\operatorname{sh} x + \cos y\operatorname{sh} x + x\cos y\operatorname{ch} x + C'(x) = \\ &= \frac{\partial v}{\partial y} = \cos y\operatorname{sh} x - y\sin y\operatorname{sh} x + x\cos y\operatorname{ch} x \end{aligned}$$

находим, что $C'(x) = 0$, т.е. $C(x) \equiv const$. Отсюда

$$\begin{aligned} f(z) &= -\,y\sin y\operatorname{ch} x + x\cos y\operatorname{sh} x + C + i(y\cos y\operatorname{sh} x + x\sin y\operatorname{ch} x) = \\ &= z\cos y\operatorname{sh} x + iz\sin y\operatorname{ch} x + C = z(\operatorname{sh} x\cos y + i\operatorname{ch} x\sin y) + C \\ &= z\operatorname{sh} z + C. \end{aligned}$$

Найдите *аналитическую функцию $f(z) = U(r;\varphi) + iV(r;\varphi)$, если*

$$U(r;\varphi) = r\varphi\cos\varphi + r\ln r\sin\varphi.$$

4. `Сопряжённые гармонические функции.`

Определение 14. Если функция $u(x;y)$, определённая в некоторой области $\widetilde{G} \subseteq \mathbb{R}^2$ и имеющая там непрерывные частные производные второго порядка, удовлетворяет в этой области уравнению Лапласа

$$\Delta u(x;y) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \qquad (x;y) \in \widetilde{G},$$

то её называют *гармонической в области* $\widetilde{G}$.

Две гармонические функции, связанные условиями Коши-Римана, называют *сопряжёнными.*

Действительная и мнимая части аналитической функции являются сопряжёнными гармоническими функциями.

Покажем это.

Поскольку (как будет доказано ниже) аналитическая функция является бесконечно дифференцируемой, её действительная и мнимая части также бесконечно дифференцируемы. В частности, они имеют непрерывные производные второго порядка.

Из условий Коши-Римана для функции $u(x;y)$ получаем:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial v}{\partial x}\right) = -\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}.$$

Из курса математического анализа известно, что непрерывные смешанные производные совпадают, следовательно, функция $u(x;y)$ удовлетворяет уравнению Лапласа и является гармонической.

Аналогично доказывается, что и функция $v(x;y)$ является гармонической.

Пример 3. Выясним, существует ли аналитическая функция, действительная часть которой $u(x;y) = \frac{x^2}{x+y}$.

Если такая аналитическая функция $f(z)$ существует, то функция $u(x;y)$ должна удовлетворять уравнению Лапласа.

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \left(\frac{x^2+2xy}{(x+y)^2}\right)'_x = \frac{(2x+2y)(x+y)^2 - 2(x+y)(x^2+2xy)}{(x+y)^4} = \frac{2y^2}{(x+y)^3},\\
&\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x^2\left(\frac{-1}{(x+y)^2}\right)'_y = \frac{2x^2}{(x+y)^3}.
\end{aligned}$$

Мы видим, что сумма производных не обращается в ноль ни в какой области, следовательно, данная функция не является действительной частью какой-либо аналитической функции.

5. `Линии уровня сопряжённых гармонических функций ортогональны.`

Или, в другой формулировке: *семейства линий уровня действительной и мнимой частей аналитической функции ортогональны.*

Действительно, мы знаем из курса математического анализа, что градиент скалярного поля ортогонален линии уровня этого поля, т.е.

$$\operatorname{grad} u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}; \frac{\partial u}{\partial y}\right) \perp \{u(x;y) = C\}, \qquad \operatorname{grad} v = \left(\frac{\partial v}{\partial x}; \frac{\partial v}{\partial y}\right) \perp \{v(x;y) = C\}.$$

В свою очередь из условий Коши-Римана следует, что градиенты действительной и мнимой частей аналитической функции тоже ортогональны друг другу:

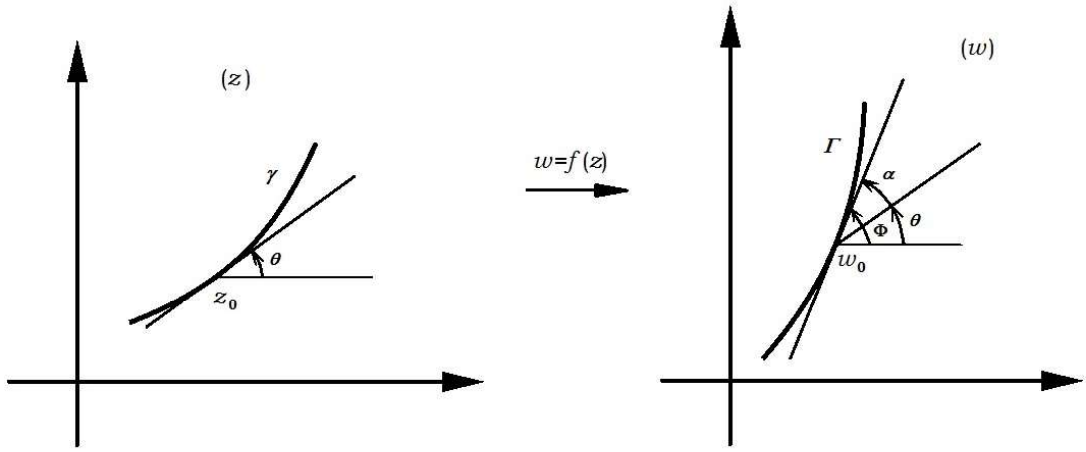
$$(\operatorname{grad} u, \operatorname{grad} u) = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Следовательно, линии семейства $\{u(x; y) = C\}$ ортогональны линиям семейства $\{v(x; y) = C\}$ (тем, с которыми они пересекаются).

Геометрический смысл производной

Пусть функция $w = f(z)$ аналитическая в некоторой окрестности Ω точки z_0 и пусть $f'(z_0) \neq 0$. Рассмотрим производную:

$$f'(z_0) = ke^{i\alpha} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \left| \frac{\Delta w}{\Delta z} \right| \cdot e^{i(\arg \Delta w - \arg \Delta z)}.$$



Проведём через точку z_0 гладкую кривую γ, $\gamma \subset \Omega$. Пусть Γ – её образ, проходящий через точку $w_0 = f(z_0)$ – также гладкая кривая. Возьмём на кривой γ точку $z = z_0 + \Delta z$ и устремим её к z_0 вдоль γ. В силу гладкости кривой угол наклона секущей Δz устремится к углу θ наклона касательной в точке z_0. При этом в силу непрерывности отображения, то же самой будет происходить в окрестности точки w_0: образ w точки z будет приближаться к w_0 вдоль кривой Γ, а угол наклона секущей $\Delta w = w - w_0$ устремится к углу Φ наклона касательной в точке w_0:

$$\theta = \lim_{\Delta z \to 0} \arg \Delta z, \qquad \Phi = \lim_{\Delta w \to 0} \arg \Delta w.$$

Тогда

$$\alpha = \lim_{\Delta z \to 0} (\arg \Delta w - \arg \Delta z) = \Phi - \theta.$$

Это означает, что кривая γ, проходящая через точку z_0 под углом θ, после отображения в плоскость w поворачивается на угол α и проходит через точку w_0 под углом $\Phi = \theta + \alpha$.

Другими словами, отображение, осуществляемое функцией f, переводит гладкую кривую в гладкую кривую и при этом все кривые, проходящие через точку z_0, поворачивает в этой точке[12] на один и тот же угол α.

[12] В другой точке z_1 оно повернёт все кривые на другой угол $\beta = \arg f'(z_1)$.

Отсюда в том числе следует, что это отображение *сохраняет углы между кривыми в точке* z_0: если две кривые пересекаются в точке z_0 под некоторым углом, то после поворота каждой из кривых на один и тот же угол α угол между ними не изменится.

Обсудим геометрический смысл модуля производной. Из соотношения

$$k = \lim_{\Delta z \to 0} \left| \frac{\Delta w}{\Delta z} \right|,$$

отбрасывая бесконечно малые порядка выше первого, получаем

$$|\Delta w| \approx k|\Delta z|,$$

это означает, что малые линейные элементы в точке z_0 преобразуются подобным образом, и k является коэффициентов подобия при этом преобразовании. В частности, окружность с центром в точке z_0 достаточно малого радиуса ρ отображается в окружность с центром в точке w_0 радиуса $k\rho$.

Величина $|f'(z_0)|$ называется *линейным растяжением кривой в точке* z_0 при отображении $w = f(z)$. Оно не зависит от вида и направления кривой, проходящей через точку z_0, и определяется только функцией, осуществляющей этот отображение.

Это свойство называется *свойством постоянства растяжений в точке* z_0.

Определение 15. Отображение окрестности точки z_0, обладающее свойствами постоянства растяжений и сохраняющее углы между кривыми в этой точке, называется *конформным отображением в точке* z_0.

Из определения конформного отображения следует, что треугольник с вершиной в точке z_0 отображается в подобный треугольник с вершиной в точке w_0.

Итак, функция, аналитическая в окрестности точки z_0, осуществляет в этой точке конформное отображение.