# 12. Метрические пространства. Сходимость в пространстве $\mathbb{R}^n$

## 12.1. Расстояние. Сходимость в метрическом пространстве

**Определение 12.1.** Пусть $X$ — произвольное непустое множество, а $x$, $y$, $z$, ... — его элементы. Это множество называется *метрическим пространством*, если указано правило, по которому каждой паре элементов $x$, $y$ ставится в соответствие единственное неотрицательное число $\rho(x, y)$, причем

1) $\rho(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$;

2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;

3) $\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z)$ (неравенство треугольника).

Это правило называется *функцией расстояния* или *метрикой* в $X$, а $\rho(x, y)$ называется *расстоянием между $x$ и $y$*.

Метрическое пространство будем обозначать $(X, \rho)$ или просто $X$.

**П р и м е р 12.1.** Множество $\mathbb{R}$ вещественных чисел образует метрическое пространство, если ввести метрику $\rho(x, y) = |x - y|$.

**Определение 12.2.** Пусть на множестве $X$ заданы две метрики — $\rho_1$ и $\rho_2$. Метрики $\rho_1$ и $\rho_2$ называются *эквивалентными*, если найдутся $\alpha, \beta > 0$ такие, что

$$\alpha\rho_1(x, y) \leqslant \rho_2(x, y) \leqslant \beta\rho_1(x, y)$$

при всех $x, y \in X$.

**Определение 12.3.** Пусть $r > 0$. *Окрестностью радиуса $r$* (*$r$-окрестностью*) точки $a \in (X, \rho)$ называется множество $O_r(a) = \{x \in X : \ \rho(x, a) < r\}$.

**П р и м е р 12.2.** В пространстве $\mathbb{R}$ (см. пример 12.1)

$$O_r(a) = \{x \in \mathbb{R} : \ |x - a| < r\} = (a - r, a + r).$$

**Определение 12.4.** Пусть $(X, \rho)$ — метрическое пространство и $A \subseteq X$.

Точка $a$ называется *внутренней точкой множества* $A$, если $\exists \, \varepsilon > 0 : \ O_\varepsilon(a) \subseteq A$.

Множество $A$ называется *открытым* в $(X, \rho)$, если каждая его точка внутренняя.

Под *окрестностью точки $a$* понимают любое открытое множество, содержащее точку $a$. Обозначают $O(a)$.

Точка $a$ называется *внешней точкой множества* $A$, если $\exists \, O(a) : \ O(a) \subseteq X \setminus A$.

Точка $a$ называется *граничной точкой множества* $A$, если

$$\forall \, O(a) \ \ \exists \, x \in A \cap O(a) \ \text{ и } \ \exists \, y \in (X \setminus A) \cap O(a).$$

Точка $a$ называется *предельной точкой множества* $A$, если

$$\forall \ O(a) \ \ A \cap \check{O}(a) \neq \emptyset.$$

Или (эквивалентное определение) точка $a$ называется *предельной точкой множества* $A$, если в любой ее окрестности найдется бесконечно много точек множества $A$.

Множество всех предельных точек множества $A$ обозначают $A'$.

Множество $A$ называется *замкнутым* в $(X, \rho)$, если $A' \subseteq A$.

Точка $a$ называется *точкой прикосновения множества* $A$, если

$$\forall\ O(a) \quad A \cap O(a) \neq \emptyset.$$

Множество всех точек прикосновения множества $A$ обозначают $\overline{A}$ и называют *замыканием* $A$.

**Упражнение.** Покажите, что:

1) $A$ замкнуто тогда и только тогда, когда оно совпадает со своим замыканием;

2) $A$ замкнуто тогда и только тогда, когда его дополнение открыто.

**Определение 12.5.** Множество $A \subset (X, \rho)$ называется *ограниченным*, если найдутся $a \in X$ и $O(a)$ такие, что $A \subseteq O(a)$.

**Определение 12.6.** Совокупность открытых множеств $\{G_\alpha\}$ называется *открытым покрытием множества* $A$, если $A$ принадлежит объединению $G_\alpha$.

**Определение 12.7.** Множество $A$ называется *компактным* (*компактом*) в $(X, \rho)$, если из любого открытого покрытия этого множества можно выделить его конечное подпокрытие.

Компактное множество является ограниченным и замкнутым в произвольном метрическом пространстве. Если $X$ – конечномерное пространство, то в нем любое ограниченное замкнутое множество является компактом.

**Определение 12.8.** Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ — последовательность точек (элементов) метрического пространства $(X, \rho)$. Эта последовательность называется *сходящейся в* $(X, \rho)$, если существует такой элемент $a \in X$, что $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, a) = 0$.

То есть сходимость последовательности элементов метрического пространства означает, что расстояние от этих элементов до предельной точки стремится к нулю.

Далее будут рассматриваться конкретные метрические пространства, для определения которых напомним одно из понятий теории множеств.

**Определение 12.9.** Пусть $A$ и $B$ – произвольные множества. *Декартовым произведением* множеств $A$ и $B$ (обозначают $A \times B$) называется множество пар $(a, b)$, где $a \in A$, $b \in B$, причем $(a, b) = (b, a) \Leftrightarrow a = b$.

Декартово произведение $\underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{n \text{ раз}}$ обозначается $\mathbb{R}^n$, т. е. $\mathbb{R}^n$ — множество всех упорядоченных наборов из $n$ вещественных чисел $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Каждый набор будем называть *точкой* в пространстве $\mathbb{R}^n$ или *$n$-мерным вектором* и обозначать одной буквой $x = (x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$. При этом число $x_i$ называют $i$-й координатой вектора (точки) $x \in \mathbb{R}^n$.

Операции сложения элементов и умножения на скаляр в $\mathbb{R}^n$ вводятся покоординатно: для любых $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} x + y &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n), \\ \lambda x &= (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n). \end{aligned}$$

С таким образом введенными операциями пространство $\mathbb{R}^n$ является линейным (векторным) пространством.

Наиболее известными примерами пространства $\mathbb{R}^n$ являются:

$\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ — множество вещественных чисел,

$\mathbb{R}^2$ — числовая плоскость, в которой задана система координат,

и $\mathbb{R}^3$ — числовое трехмерное пространство.

## 12.2. Метрическое пространство $\mathbb{R}^n$

Пусть $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ – точки пространства $\mathbb{R}^n$. Определим расстояние между ними тремя разными способами:

1) $\rho_0(x, y) = \max\limits_i |x_i - y_i|$;

2) $\rho_1(x, y) = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$;

3) $\rho_2(x, y) = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$ (евклидова метрика).

Функции $\rho_0(x, y)$, $\rho_1(x, y)$, $\rho_2(x, y)$ являются метриками. Доказательство этого не представляет особых трудностей и предлагается читателю, за исключением неравенства треугольника для метрики $\rho_2(x, y)$, которое мы сейчас проведем.

Вначале докажем неравенство Коши–Буняковского[23]:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |b_i|^2}.$$

Для заданных $(a_1, \ldots, a_n)$ и $(b_1, \ldots, b_n)$ введем функцию $\varphi(t) = \sum\limits_{i=1}^{n} (a_i t + b_i)^2$, $t \in \mathbb{R}$. Представим ее в виде

$$\varphi(t) = t^2 \left( \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \right) + 2t \sum_{i=1}^{n} a_i b_i + \sum_{i=1}^{n} b_i^2.$$

[23] *Виктор Яковлевич Буняковский* (1804–1889) – русский математик, автор работ по теории чисел и теории вероятностей.

Поскольку $\varphi(t) \geqslant 0$ при всех $t$, дискриминант этого квадратного трехчлена

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 - \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \leqslant 0,$$

откуда получаем нужно неравенство

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}. \qquad \square$$

Из этого неравенства следует неравенство Минковского[24]:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}. \tag{12.1}$$

Действительно,

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} a_i b_i + \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \leqslant$$
$$\leqslant \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\right)^2 + 2\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2} + \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}\right)^2 =$$
$$= \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}\right)^2. \ \square$$

[24] *Герман Минковский* (1864–1909) – немецкий математик, разработавший геометрическую теорию чисел и геометрическую четырехмерную модель теории относительности.

Теперь легко доказать неравенство треугольника для метрики $\rho_2$:

$$\rho_2(x, y) \leqslant \rho_2(x, z) + \rho_2(z, y)$$

или

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(z_i - y_i)^2}.$$

Оно получается из неравенства Минковского (12.1), если взять $a_i = x_i - z_i$ и $b_i = z_i - y_i$.

**Пример 12.3.** Изобразить $O_r(a)$ в $(\mathbb{R}^2, \rho_0)$, $(\mathbb{R}^2, \rho_1)$ и $(\mathbb{R}^2, \rho_2)$.

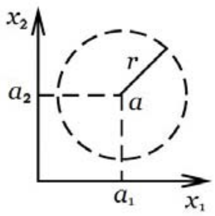


Рис. 12.1

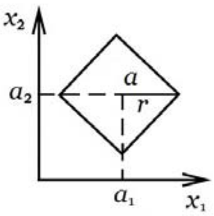


Рис. 12.2

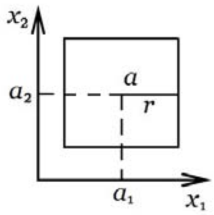


Рис. 12.3

Ответ:

В $(\mathbb{R}^2, \rho_2): \ (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 < r^2$, т. е. открытый круг с центром в точке $a$ радиуса $r$ (рис. 12.1).

В $(\mathbb{R}^2, \rho_1): \ |x_1 - a_1| + |x_2 - a_2| < r$ — квадрат с центром в точке $a$, диагонали которого параллельны координатным осям $OX_1$ и $OX_2$ и равны $2r$ (без границы) (рис. 12.2).

В $(\mathbb{R}^2, \rho_0): \ \max\{|x_1 - a_1|, |x_2 - a_2|\} < r$ — квадрат с центром в точке $a$, стороны которого параллельны координатным осям и равны $2r$ (без границы) (рис. 12.3).