11.5. Интеграл с переменным верхним пределом. Формула Ньютона–Лейбница

Пусть функция f интегрируема на $[a, b]$. Функция

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \quad x \in [a, b],$$

называется *интегралом с переменным верхним пределом интегрирования.*

Теорема 11.8. *Пусть функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$. Тогда интеграл с переменным верхним пределом интегрирования непрерывен на отрезке $[a, b]$.*

Доказательство. Из интегрируемости функции f следует ее ограниченность, т. е. существует $M > 0$ такое, что $|f(t)| \leqslant M$ при всех $t \in [a, b]$. Пусть x_0 – любая точка из $[a, b]$, $\varepsilon > 0$. Используя свойства интеграла, получим

$$F(x) - F(x_0) = \int_a^x f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt = \int_{x_0}^x f(t)dt.$$

Следовательно,

$$|F(x) - F(x_0)| = \left|\int_{x_0}^x f(t)dt\right| \leqslant \left|\int_{x_0}^x |f(t)|dt\right| \leqslant M|x - x_0|.$$

Итак, для заданного $\varepsilon > 0$ число $\delta = \dfrac{\varepsilon}{M} > 0$ таково, что для всех x со свойством $|x - x_0| < \delta$

$$|F(x) - F(x_0)| \leqslant M|x - x_0| < \frac{M\varepsilon}{M} = \varepsilon,$$

т. е. функция F непрерывна в точке x_0. □

Теорема 11.9. *Если f интегрируема на $[a, b]$ и непрерывна в точке $x_0 \in [a, b]$, то функция F дифференцируема в точке x_0 и $F'(x_0) = f(x_0)$.*

Доказательство. Ввиду непрерывности функции f в точке x_0, для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех $t \in [a, b]$ с условием $|t - x_0| < \delta$ выполняется $|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$. Тогда для любого x, $0 < |x - x_0| < \delta$, выполняется

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) = \frac{\displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)dt}{x - x_0} - f(x_0) =$$

$$= \frac{\displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)dt - f(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = \frac{\displaystyle\int_{x_0}^{x} [f(t) - f(x_0)]dt}{x - x_0}.$$

Следовательно,

$$\left|\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)\right| \leqslant \frac{\left|\displaystyle\int_{x_0}^{x} |f(t) - f(x_0)|dt\right|}{|x - x_0|} <$$

$$< \frac{\varepsilon\left|\displaystyle\int_{x_0}^{x} dt\right|}{|x - x_0|} = \frac{\varepsilon|x - x_0|}{|x - x_0|} = \varepsilon,$$

что по определению означает дифференцируемость функции $F(x)$ в точке $x_0 \in [a, b]$. □

Теорема 11.10 (о существовании первообразной). *Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$. Тогда функция*

$$F(x) = \int_{a}^{x} f(t)dt$$

является первообразной для функции f на отрезке $[a, b]$.

Доказательство. Из предыдущей теоремы следует, что

$$\left(\int_{x_0}^{x} f(t)dt\right)' = f(x),$$

а это по определению означает, что $F(x)$ является первообразной функцией для $f(x)$ на отрезке $[a, b]$. $\square$

Теорема 11.11 (формула Ньютона[21]–Лейбница[22]). *Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$ и Φ есть ее первообразная на этом отрезке, то имеет место формула*

$$\int_a^b f(x)dx = \Phi(b) - \Phi(a).$$

Доказательство. Из предыдущей теоремы следует, что функция $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ есть первообразная для функции f на отрезке $[a, b]$. Следовательно, любая другая ее первообразная Φ имеет вид

$$\Phi(x) = F(x) + C = \int_a^x f(t)dt + C,$$

[21] *Исаак Ньютон* (1642–1727) – великий английский математик, механик, астроном, физик, теолог. Основатель классической физики. Создал теоретические основы механики и астрономии, открыл закон всемирного тяготения, разработал начала дифференциального и интегрального исчислений, установил фундаментальные положения физической оптики. Изобретатель зеркального телескопа.

[22] *Готфрид Вильгельм Лейбниц* (1646—1716) – немецкий философ, математик, физик и изобретатель, юрист, историк, языковед. Один из создателей дифференциального и интегрального исчислений, создатель комбинаторики. Заложил основы математической логики, сформулировал закон сохранения энергии в механике.

поэтому

$$\Phi(a) = \int_a^a f(t)dt + C = C,$$

$$\Phi(b) = \int_a^b f(t)dt + C.$$

Следовательно,

$$\Phi(b) - \Phi(a) = \int_a^b f(t)dt. \qquad \square$$

Полученная формула называется *основной формулой интегрального исчисления*. Ее часто записывают в виде

$$\int_a^b f(t)dt = F(t)\Big|_a^b,$$

где введено обозначение

$$F(t)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$